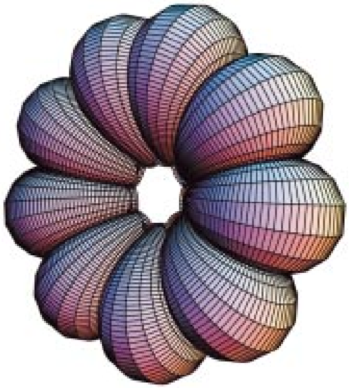
El significado geométrico de la curvatura: superficies de curvatura media constante

Conferencia pronunciada con motivo de la concesión a

Luis J. Alías Linares

del Premio Jóvenes Investigadores de la Región de Murcia 2002
convocado por la Fundación Séneca –Agencia Regional de Ciencia y Tecnología–



Fundación Séneca - Agencia de Ciencia y Tecnología de la Región de Murcia

LUIS J. ALÍAS LINARES

EL SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DE LA CURVATURA: SUPERFICIES DE CURVATURA MEDIA CONSTANTE

Fundación Séneca - Agencia de Ciencia y Tecnología de la Región de Murcia

EL SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DE LA CURVATURA:
SUPERFICIES DE CURVATURA MEDIA CONSTANTE

1ª ed.: Murcia 2004

D.L.: MU-139-2004

Ilustración portada: superficie de curvatura media constante
conocida como "superficie de Sievert".

Edición realizada para la Fundación Séneca
por *QUADERNA EDITORIAL*
Telf. 968 343 050 - quaderna@telefonica.net

A Carmela

ÍNDICE

RESUMEN

Estas notas son una versión ampliada de la conferencia impartida por el autor el 30 de abril de 2003, con ocasión de la entrega del Premio Jóvenes Investigadores de la Región de Murcia 2002. Van dirigidas a una audiencia general, no especializada, y en particular sin una formación matemática avanzada. En ellas se pretende explicar de una manera intuitiva e informal el significado geométrico de la curvatura, tomando como núcleo central de la exposición el teorema de Aleksandrov, un resultado clásico de geometría diferencial de superficies.

El autor agradece a los doctores María de los Ángeles Hernández Cifre y Pablo Mira Carrillo la ayuda prestada en la realización de las figuras que ilustran estas notas y al doctor Pascual Lucas Saorín el diseño del formato final del texto. Así mismo, agradece a los doctores Francisco Candel Sánchez, Ángel Ferrández Izquierdo y José A. Pastor González la ayuda prestada en la revisión de este trabajo y las sugerencias y correcciones realizadas. En cualquier caso, la versión final del mismo, con sus posibles errores o incorrecciones, es responsabilidad única del autor.

– 1 –

AH PERO..., ¿EN MATEMÁTICAS TAMBIÉN SE INVESTIGA?

La investigación en Matemáticas es, para desánimo de los que a ella nos dedicamos, una gran desconocida no sólo por el público en general sino también dentro del ámbito universitario y científico en el que llevamos a cabo nuestro trabajo. Preguntas como *¿Qué se puede investigar en un tema en el que todo está hecho?* o *Pero... ¿dos y dos no son cuatro?* son, por desgracia, de lo más frecuente cuando manifestamos nuestra condición de *investigador matemático*. La gente entiende que se investigue en Medicina, en Biología, en Química, en Física, y en otras áreas científicas en donde *queda tanto por descubrir*. Pero... *¿qué se puede investigar en un tema muerto como las Matemáticas?* Nada más lejos de la realidad.

Las Matemáticas no son en absoluto un tema muerto, sino que están en continuo proceso de construcción y desarrollo. Si bien es cierto que la aportación de las Matemáticas a la producción científica total representa una parte muy pequeña (el 1.8% de la producción mundial, según datos de la *National Science Foundation* de los Estados Unidos) y que los últimos descubrimientos matemáticos rara vez son objeto de atención por parte de la prensa no especializada, no por ello la investigación matemática debe ser menospreciada o subestimada.

No en vano, muchos de los avances tecnológicos más recientes no habrían sido posibles sin su correspondiente fundamentación matemática teórica y, aunque muchas veces no seamos conscientes de ello, las matemáticas están casi permanentemente presentes en nuestra vida cotidiana (cuando vemos la televisión o hablamos por teléfono, cuando utilizamos el ordenador o el microondas, etc.).

En particular, durante el siglo XX las Matemáticas han experimentado a nivel mundial un desarrollo excepcional y se han abierto nuevos horizontes hasta hace poco inimaginables. Por suerte, este desarrollo extraordinario de las Matemáticas también se ha dejado sentir en nuestro país, muy especialmente en los últimos 20 ó 25 años. A este respecto, merece la pena consultarse el informe titulado *La investigación matemática en España en el periodo 1990-1999*, elaborado por el Comité Español para el Año Mundial de las Matemáticas (CEAMM2000) y editado conjuntamente por la Real Sociedad Matemática Española, la *Societat Catalana de Matemàtiques*, la Sociedad de Estadística e Investigación Operativa, y la Sociedad Española de Matemática Aplicada, con el patrocinio de la Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología, con ocasión de la celebración del año mundial de las Matemáticas.

En dicho informe se puede comprobar, entre otras cosas, cómo la investigación matemática española ha experimentado un crecimiento extraordinario en los últimos años, tanto en cantidad como en calidad e impacto. Dicho crecimiento ha ocasionado que la aportación matemática española a la producción científica recogida por el *Institute for Scientific Information* (ISI) haya pasado de representar el 1.7% de la producción mundial en 1990 al 4.18% en 2001, casi el doble que la media de las diferentes disciplinas científicas españolas, situando a las Matemáticas en el tercer lugar en cuanto a lo que supone su aportación dentro de la producción mundial, por detrás de la Astrofísica y de las Ciencias Agrarias.

La Comunidad Autónoma de la Región de Murcia no ha sido ajena a dicho crecimiento, siendo una de las comunidades con mayor crecimiento en su producción matemática. Esto ha quedado también manifiesto en el informe *20 años de ciencia en la Región de Murcia. Análisis bibliométrico*, recientemente publicado por la Academia de Ciencias de la Región de Murcia, en donde se constata el buen estado de la investigación matemática en nuestra comunidad.

En definitiva, y antes de entrar de lleno en el objeto fundamental de estas notas, nos gustaría desde aquí reclamar el reconocimiento público a la situación actual de la investigación matemática en España. Una investigación a menudo olvidada en los medios públicos y a la que, en España, se destina una cantidad muy limitada de recursos, a pesar del excelente nivel investigador de nuestra comunidad matemática. La designación de Madrid como sede del próximo Congreso Internacional de Matemáticos del año 2006 no es desde luego nada casual y, a mi entender, debe considerarse como un reconocimiento de la comunidad matemática internacional al estado de la investigación matemática en nuestro país[1].

Confiamos en que todo esto contribuya también a que la sociedad española en general empiece a reconocer y valorar el nivel de las Matemáticas en España. Aunque parezca una utopía, no descarto que llegue alguna vez el día en que, cuando alguien nos pregunte a qué nos dedicamos los matemáticos, no tengamos que escuchar la dichosa frasecita de *Ah pero..., ¿en Matemáticas también se investiga?*

---

1 El Congreso Internacional de Matemáticos (*International Congress of Mathematicians*, ICM) es el más importante acontecimiento matemático que se celebra a nivel mundial. Este congreso, promovido por la *International Mathematical Union* se celebró por primera vez en 1897 en Zürich y a continuación en París en 1900. Desde entonces se ha venido celebrando ininterrumpidamente cada cuatro años en diferentes ciudades de todo el mundo, con excepción de los años 1916, 1940 y 1946, por causa de las dos guerras mundiales. Fue precisamente en el ICM de París de 1900 donde David Hilbert presentó sus famosos 23 problemas. En el ICM de Toronto de 1924 se acordó instaurar el famoso premio matemático conocido como la *Medalla Fields*, equivalente en cierto sentido al *Premio Nobel*, y que se otorga desde el ICM de Oslo del año 1936 en el correspondiente ICM cada cuatro años.

– 2 –

UN RESULTADO CLÁSICO: EL TEOREMA DE ALEKSANDROV

El teorema de Aleksandrov sobre superficies de curvatura media constante constituye, sin lugar a dudas, uno de los resultados más bonitos y, a su vez, profundos de la teoría global de superficies en el espacio euclídeo. Este teorema, que fue demostrado en 1958 por el matemático y geómetra ruso Aleksandr D. Aleksandrov (1912-1999), establece que *las únicas superficies cerradas y embebidas con curvatura media constante en el espacio euclídeo son las esferas redondas*.

¿Qué quiere decir exactamente semejante afirmación? Para un matemático con una formación elemental en geometría diferencial no debería ser muy complicado comprender el significado del enunciado que acabamos de exponer. De hecho, sin demasiado esfuerzo adicional, el teorema de Aleksandrov se puede ya incluir sin ningún problema entre los contenidos básicos de un primer curso de geometría diferencial de curvas y superficies, como el que habitualmente se enseña en el tercer curso de las licenciaturas en Matemáticas de la universidad española. Sin embargo, entendemos que para un profano (en el mejor de los sentidos) de las matemáticas, e incluso para algún aficionado a las matemáticas con no demasiada formación en geometría diferencial, el enunciado del teorema de Aleksandrov se parece más a un jeroglífico indescifrable cargado de galimatías que a un resultado bonito y profundo que pueda despertar el más mínimo interés de nadie.

Bien es cierto que nosotros, los matemáticos, tenemos nuestro propio concepto de belleza matemática y que muchas veces ésta queda escondida detrás de la complicada terminología y del rígido formalismo matemático, pero tenemos que reconocer que en el enunciado que acabamos de exponer del teorema de Aleksandrov aparecen ciertos vocablos que, cuanto menos, necesitan de una mínima explicación para comprender exactamente qué es lo que el teorema nos está diciendo. Expresiones como *superficie cerrada y embebida* o *curvatura media constante* no forman parte del habla cotidiana del común de los mortales, por lo que no debemos extrañarnos que semejante enunciado no despierte demasiada emoción en una gran mayoría de la audiencia.

Nuestro objetivo fundamental en esta lección es tratar de explicar el significado y la profundidad del teorema de Aleksandrov, tratando de hacer éste comprensible, incluso para aquellos que hace ya muchos años abandonaron sus estudios de matemáticas, partiendo de la base de que todos tenemos una cierta intuición geométrica, a veces latente pero siempre viva. Nuestro trabajo se verá recompensado con creces si, al finalizar la lectura de estas notas, usted, amable lector e improvisado alumno, es capaz de comprender el alcance de dicho resultado con la misma familiaridad con la que, probablemente, comprende y aprecia el célebre y popular teorema de Pitágoras. Así mismo, nos sentiremos sumamente complacidos si, al tiempo, conseguimos transmitir nuestra pasión por la investigación matemática, esa pequeña cenicienta y, por desgracia, hermana pobre de la investigación científica, a la que nos debemos en cuerpo y alma y que, muy de vez en cuando, nos proporciona momentos de inmensa alegría.

– 3 –
¿QUÉ ES UNA SUPERFICIE?

La primera pregunta que nos asalta ante el enunciado del teorema de Aleksandrov es *¿Qué es una superficie?* Intuitivamente, todos tenemos una idea natural de lo que es una superficie. Desde el punto de vista matemático, y en el contexto que nos ocupa, por superficie entendemos una porción (o subconjunto) de naturaleza bidimensional dentro del espacio ambiente en el que vivimos. Tratemos de aclarar un poco más este concepto. El espacio ambiente en que vivimos, al que solemos llamar *espacio euclídeo*, tiene naturaleza tridimensional (como nosotros mismos) y en él distinguimos tres dimensiones: alto, largo y ancho. Ahora bien, dentro de ese mundo tridimensional tiene sentido considerar otros objetos geométricos de dimensiones inferiores. El más sencillo es lo que los matemáticos habitualmente llamamos *curva*. Intuitivamente, una curva es un camino en el espacio, semejante al vuelo de una mosca. Un curva tiene naturaleza *unidimensional* porque a lo largo de ella sólo nos podemos desplazar en una dirección, que es precisamente la marcada por la curva. Las curvas sirven, por ejemplo, para modelar la trayectoria de un móvil que se mueva libremente en el espacio. Desde luego, el ejemplo más sencillo de curva lo constituye la línea recta, de igual manera que el camino más sencillo que puede describir un móvil es la trayectoria rectilínea.

Así mismo, tiene sentido considerar objetos geométricos *bidimensionales*, a los que llamamos *superficies*, es decir, porciones del espacio tridimensional (subconjuntos) que tienen naturaleza bidimensional. Una superficie tiene naturaleza bidimensional porque a lo largo de ella sólo nos podemos desplazar en dos dimensiones, ya que el desplazamiento sobre la superficie está restringido a caminos contenidos en ella misma. Para un supuesto individuo bidimensional que viviera *dentro* de una superficie no tendría sentido la *tercera dimensión*, ya que su mundo está limitado a la superficie en la que vive, de manera que no podría *mirar hacia arriba*, ya que eso supondría un movimiento en una tercera dimensión de la que carece. Para dicho individuo bidimensional, la tercera dimensión sonaría a ciencia ficción, igual que a nosotros, individuos tridimensionales, nos lo parece la *cuarta dimensión*.

Así, el ejemplo más sencillo de superficie que se nos puede ocurrir es la superficie llana de una mesa, lo que los matemáticos llamamos el *plano* (Figura 1). Otros ejemplos de superficies que habitualmente nos encontramos en la vida cotidiana son la superficie de un balón de fútbol, a la que llamamos *esfera* (Figura 2) o la superficie de un melón, es decir, el *elipsoide* (Figura 3).

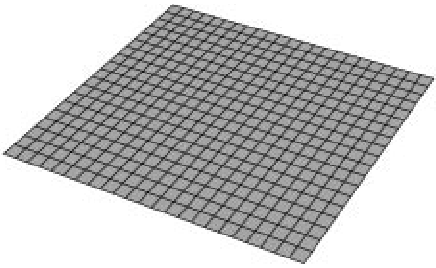


Figura 1. La superficie de una mesa: plano.

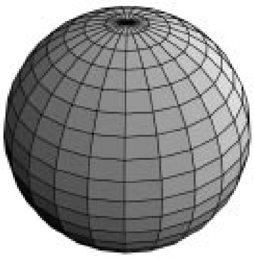


Figura 2. La superficie de un balón de fútbol: esfera.

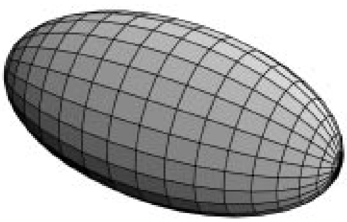


Figura 3. La superficie de un melón: elipsoide.

Señalemos aquí que no se tiene que confundir la superficie en sí, bidimensional, con el volumen tridimensional que encierra. Así, por ejemplo, en el lenguaje cotidiano es muy común confundir la esfera (superficie bidimensional) con la bola (volumen tridimensional encerrado por la esfera). Otros ejemplos más sofisticados de superficies son la superficie de un *donuts*, a la que en términos matemáticos llamamos *toro* (Figura 4), la superficie de un bote (sin tapas), esto es, el *cilindro* (Figura 5), la superficie de un vaso de *Biomanán*, es decir, el *hiperboloide* (Figura 6), etc...

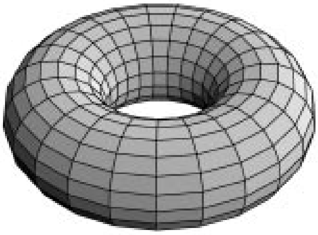


Figura 4. La superficie de un *donuts:* toro.

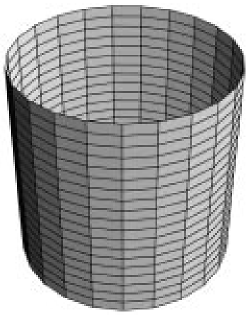


Figura 5. La superficie de un bote: cilindro.

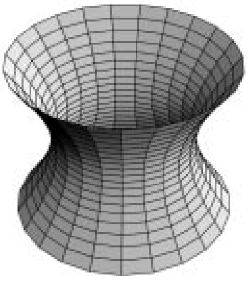


Figura 6. La superficie de un vaso de *Biomanán:* hiperboloide.

– 4 –

¿QUÉ ES LA CURVATURA?

Otro término clave en el enunciado del teorema de Aleksandrov es el de *curvatura*. La palabra curvatura es fundamental en geometría diferencial, hasta el punto de que no sería demasiado desacertado definir la geometría diferencial como la geometría de la curvatura. En palabras del célebre geómetra francés Marcel Berger, *"la curvatura es el invariante riemanniano número 1 y el más natural. Gauss y Riemann lo vieron al instante"*.

Comenzando con el caso más sencillo de curvas, de un modo más o menos informal e intuitivo, todos tenemos una idea de lo que es la curvatura de una curva y de que algo sea más o menos curvo. Sin embargo, la descripción matemática precisa del concepto de curvatura no es en absoluto nada inmediato y necesitó de diferentes aproximaciones hasta llegar al concepto actual de curvatura. El primer intento serio de definir matemáticamente la curvatura de una curva aparece en 1684, en la obra *Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi* del alemán Gottfried Leibniz (1646-1716), uno de los inventores del cálculo[2]. Pero fue realmente el matemático suizo Leonhard

---

2 Por cálculo entendemos el cálculo diferencial e integral. Con respecto a la invención del cálculo, tradicionalmente ha habido una disputa entre ingleses y alemanes sobre quién fue realmente el inventor del mismo. Los ingleses defienden que fue Sir Isaac Newton (1643-1727) con su *método de las fluxiones*, mientras que los alemanes defienden que fue su compatriota Leibniz. Parte de esta disputa se debe a que Newton escribió su *Methodis serierum et fluxionum* en 1671 pero no llegó a publicarlo, y no fue hasta 1736, después de su muerte, cuando se publicó una traducción al inglés de su trabajo. Entre tanto, Leibniz, independientemente y sin conocer el trabajo de Newton, desarrolló su aproximación alternativa. Por ejemplo, fue Leibniz, en un manuscrito de 1675, el que utilizó por primera vez la notación $\int f(x)dx$, hoy conocida por todos nuestros estudiantes de bachillerato. Hoy en día, no queda ninguna duda de que ambos autores contribuyeron de manera independiente y simultánea a la creación de esta disciplina, con lo que su autoría se considera compartida por ambos.

Euler (1707-1783) quien inició el estudio sistemático de la geometría intrínseca de las curvas, introduciendo los conceptos de *longitud* y *curvatura*.

Desde luego, según nuestra experiencia una línea recta no tiene curvatura alguna (su curvatura debe ser cero), puesto que no se dobla en absoluto, mientras que una circunferencia se dobla lo mismo en todos sus puntos (su curvatura debe ser la misma en todos sus puntos). Además, circunferencias de radio pequeño son circunferencias muy curvadas y conforme aumenta el radio r, disminuye la curvatura de la circunferencia, llegando entonces a la recta como caso extremo de una circunferencia de radio infinito ($r = \infty$). Así, la curvatura de una circunferencia de radio r es precisamente el cociente

$$\kappa = \frac{1}{r} \quad (\text{curvatura} = \frac{1}{\text{radio}})$$

y la curvatura de una recta es

$$\kappa = \frac{1}{\infty} = 0.$$

La idea intuitiva de Leibniz para introducir el concepto de curvatura de una curva está basada precisamente en este comportamiento de la curvatura de una circunferencia frente a su radio, en un intento por buscar una definición de curvatura que refleje tal comportamiento. Su aproximación hace uso de la llamada *circunferencia osculatriz* de una curva en un punto (del latín *osculari*, besar), que es la circunferencia que mejor se adapta a la curva en dicho punto (es decir, la circunferencia *que besa* a la curva en dicho punto).

Para describir brevemente el enfoque de Leibniz, consideremos que partimos de una *curva plana*, es decir, una curva contenida en un plano del espacio[3]. Así mismo, consideremos que nuestra curva es suficientemente suave como para que en cada punto de ella tengamos una recta tangente a la curva[4],

3 Frente a las curvas planas, tenemos lo que se llaman *curvas alabeadas* que son curvas del espacio que no están contenidas dentro de un plano. Tales curvas son de alguna manera *más curvadas* que las curvas planas, en el sentido de que no se pueden meter en un plano. Para estas curvas, además de la curvatura se define otro concepto geométrico, la *torsión*, que mide precisamente lo alabeada que es la curva. En este sentido, una curva plana sería una curva sin torsión.

4 Esto es lo que los matemáticos llamamos una *curva diferenciable*.

es decir, una recta que roza tangencialmente a la curva en dicho punto. La recta tangente es la recta que mejor se aproxima a la curva cerca del punto. Por geometría elemental, todos sabemos que por tres puntos no alineados del plano pasa una única circunferencia (en el caso de tres puntos alineados, también podríamos hacer esta afirmación permitiendo circunferencias de radio infinito, esto es, rectas). Por tanto, tres puntos P, Q y R no alineados de una curva plana determinan una circunferencia (Figura 7). Si fijamos el punto P de la curva y hacemos que los puntos Q y R se aproximen cada vez más al punto P, entonces las circunferencias determinadas por estos tres puntos *convergen* a una circunferencia tangente a la curva en P, que es la llamada *circunferencia osculatriz* de la curva en el punto P (Figura 8).

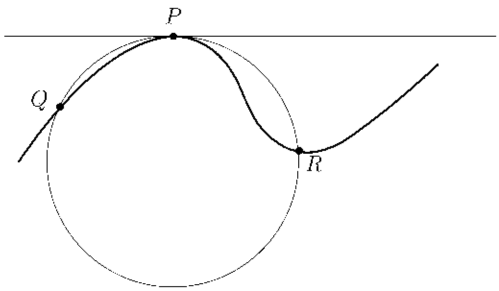


Figura 7. Tres puntos P, Q y R no alineados de una curva plana determinan una circunferencia.

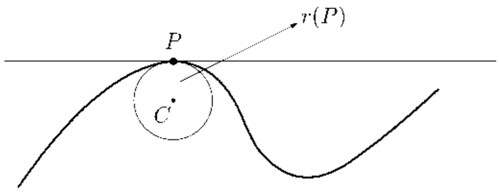


Figura 8. Circunferencia osculatriz.

Definimos entonces la curvatura de la curva en el punto P como el inverso del radio de su circunferencia osculatriz,

$$\kappa(P) = \frac{1}{r(P)}.$$

siendo *r(P)* el radio de la circunferencia osculatriz en el punto P. Este radio se llama precisamente el *radio de curvatura* de la curva en P.

Pasemos a continuación a conocer brevemente la aproximación de Euler. Para ello, consideremos de nuevo una curva plana con recta tangente en cada uno de sus puntos. Consideremos, así mismo, una recta exterior fija, que será nuestra *recta de referencia*. Entonces, Euler introduce la curvatura de una curva en un punto de ella como la *velocidad de variación* del ángulo que forma la recta tangente a la curva en dicho punto con la recta de referencia. Es decir, para cada punto P de la curva, consideremos $\theta(P)$ el ángulo que forma la recta tangente a la curva en P con la recta de referencia (Figura 9). Dados dos puntos P y Q de la curva, representemos por $\Delta\theta(P,Q)$ la diferencia entre ambos ángulos (Figura 10).

$$\Delta\theta(P,Q) = \theta(Q) - \theta(P).$$

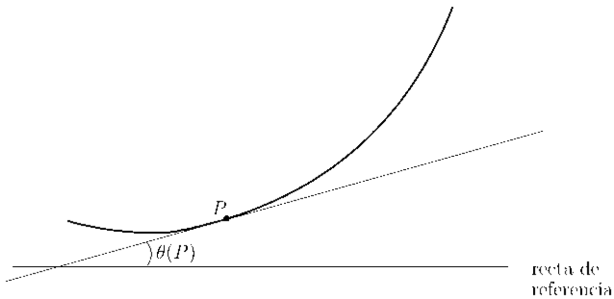


Figura 9. Ángulo de la recta tangente a la curva en *P* con la recta de referencia.

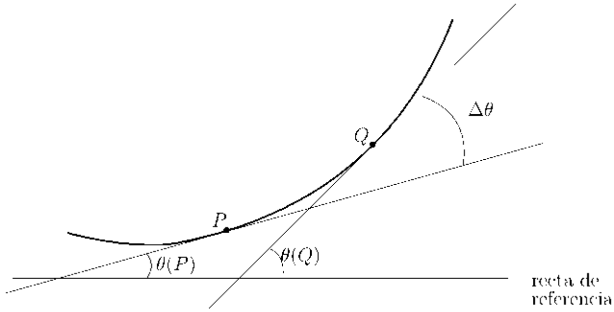


Figura 10. Diferencia entre ángulos.

Entonces, la curvatura de la curva en P viene dada por

$$\kappa(P) = \lim_{Q \to P} \frac{\Delta\theta(P,Q)}{\ell(P,Q)} = \lim_{Q \to P} \frac{\theta(Q) - \theta(P)}{\ell(P,Q)},$$

donde ℓ *(P,Q)* mide la longitud de la curva entre los puntos P y Q, es decir, la distancia entre P y Q a lo largo de la curva[5].

No es difícil ver que esta otra definición de curvatura coincide con la anterior. De hecho, con esta definición, es fácil comprobar que una línea recta tiene curvatura cero en todos sus puntos, mientras que una circunferencia de radio r tiene la misma curvatura en todos sus puntos, y viene dada por el inverso de su radio, es decir,

$$\kappa(P) = \frac{1}{r}$$

para todo punto P de una circunferencia de radio r.

Existe aún una tercera aproximación al concepto de curvatura para una curva plana que está basada en la variación de un sistema de referencia privilegiado (el llamado *diedro de Frenet*) a lo largo de la curva. Si bien no vamos a entrar aquí en más detalles al respecto, sirva este comentario al menos para hacernos reflexionar sobre lo complicado que puede llegar a ser formalizar matemáticamente conceptos como la curvatura, que nos parecen claros e intuitivos desde un punto de vista informal e impreciso.

---

5 Para la audiencia general, prometo no incluir en estas notas muchas más fórmulas matemáticas de este calibre. No obstante, el lector con conocimientos básicos de cálculo sabrá reconocer en esta expresión la derivada (o velocidad de variación) del ángulo θ.

– 5 –

LA CURVATURA DE UNA SUPERFICIE

Una vez que hemos introducido el concepto de curvatura para una curva plana, pasemos a ver qué se entiende por la curvatura de una superficie. Como ya hemos dicho anteriormente, una superficie es un objeto geométrico de naturaleza bidimensional. Análogamente al caso de curvas, las superficies que vamos a considerar aquí son suficientemente suaves como para que en cada punto de ellas podamos hablar del plano tangente a la superficie en dicho punto[6]. El plano tangente a una superficie en un punto de ella es el plano que roza tangencialmente a la superficie en dicho punto y el que mejor se aproxima a la superficie cerca de ese punto. Esto nos permite distinguir, en cada punto P de una superficie, dos tipos de direcciones: las direcciones tangentes y la dirección normal a la superficie en el punto P. Las direcciones tangentes a la superficie en el punto P son aquellas direcciones que se alcanzan a través de curvas (en general alabeadas) contenidas en la propia superficie y que pasan por el punto P. Estas direcciones constituyen precisamente las del plano tangente a la superficie en dicho punto (Figura 11).

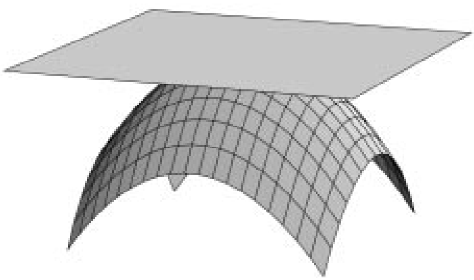


Figura 11. Direcciones tangentes: el plano tangente.

---

6 Esto es lo que llamamos *superficies diferenciables*. Son superficies sin picos ni aristas.

Por contra, la dirección normal en el punto P es la dirección perpendicular (complementaria) a dicho plano, y corresponde a la dirección de las curvas que cortan perpendicularmente a la superficie en el punto (Figura 12). Como vamos a ver a continuación, el hecho de que en cada punto de una superficie podamos considerar su plano tangente, con sus correspondientes direcciones tangentes y normal, va a ser clave para introducir el concepto de curvatura de una superficie.

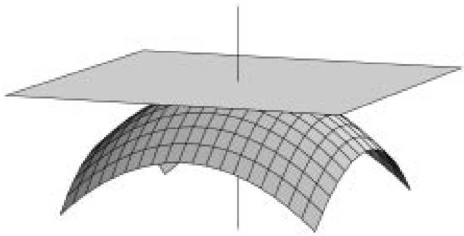


Figura 12. Dirección normal.

Fue Euler quien estableció en 1760 los fundamentos de la geometría de superficies, en su obra titulada *Recherches sur la courbuture des surfaces* y a él debemos la primera aproximación al concepto de curvatura de una superficie.

La idea básica de Euler fue reducir el estudio de la curvatura de una superficie en un punto P al estudio de la curvatura en dicho punto de las curvas que se obtienen al cortar transversalmente la superficie por planos perpendiculares a la superficie en el punto P, como a continuación vamos a ver. Fijemos una dirección $\vec{v}$ tangente a la superficie en el punto P y consideremos $\Pi_{\vec{v}}$ el plano que pasa por P, es perpendicular a la superficie en P y contiene a la dirección tangente $\vec{v}$. El plano $\Pi_{\vec{v}}$ corta a la superficie a lo largo de una curva plana en la dirección de $\vec{v}$. Esto es lo que llamamos la *sección normal* de la superficie determinada por la dirección $\vec{v}$ (Figura 13). Evidentemente, si fijamos ahora otra dirección tangente distinta $\vec{w}$, el plano $\Pi_{\vec{w}}$ varía, así como la sección normal determinada por la nueva dirección tangente $\vec{w}$. De hecho, la familia de planos perpendiculares a la superficie en el punto P constituye un haz de planos que pasan por P y contienen a la dirección normal y, en principio, cada uno de los planos de este haz determina una sección normal diferente (Figura 14).

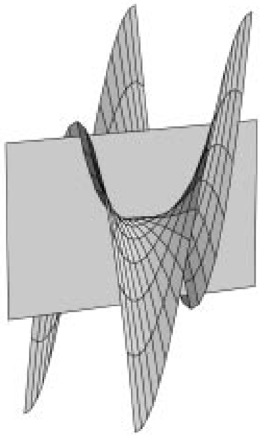


Figura 13. Sección normal.

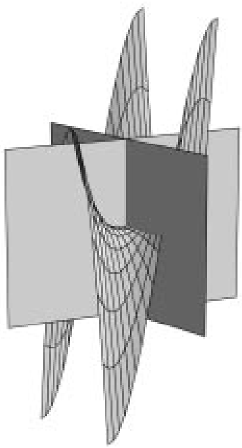


Figura 14. Haz de planos perpendiculares y secciones normales de una superficie arbitraria.

No obstante, existen casos extremos, como el caso en que la superficie de partida sea un plano o una esfera. En efecto, si la superficie de partida es un plano, entonces las secciones normales, independientemente del punto elegido y de la dirección tangente elegida, son siempre líneas rectas y, por lo tanto, tienen todas ellas curvatura cero (Figura 15). Igualmente, si la superficie es una esfera de radio r, entonces, independientemente del punto y dirección tangente elegidos, las secciones normales son ahora siempre circunferencias del mismo radio r, y todas ellas tienen la misma curvatura $1/r$

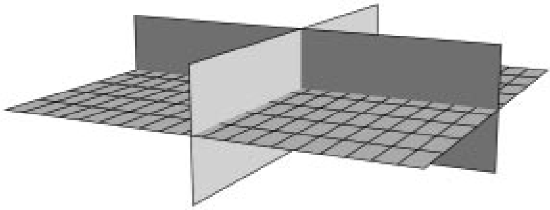


Figura 15. Secciones normales de un plano.

(Figura 16). Sin embargo, esto no es lo habitual. Lo común es que las secciones normales a la superficie varíen, tanto cuando cambiamos el punto P elegido como cuando cambiamos, fijado el punto, la dirección tangente. De esta manera, fijado el punto P generamos una familia de curvas planas, las secciones normales, que dependen de la dirección tangente elegida $\vec{v}$. Podemos entonces definir la *curvatura normal* de la superficie en el punto P y en la dirección de $\vec{v}$ como la curvatura de la correspondiente sección normal.

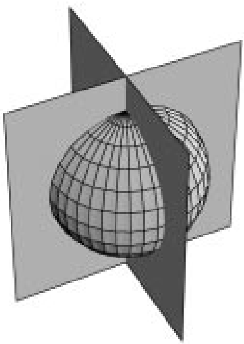


Figura 16. Secciones normales de una esfera.

Ocurre entonces que, fijado el punto P de la superficie, existen dos direcciones tangentes privilegiadas, que son precisamente aquellas direcciones en las que la curvatura normal alcanza sus valores mínimo y máximo. Estas dos direcciones privilegiadas tangentes a la superficie en el punto P, que son perpendiculares entre sí, se llaman las *direcciones principales* de la superficie en el punto P, y los correspondientes valores de la curvatura normal en dichas direcciones son las *curvaturas principales* de la superficie en dicho punto,

$$\kappa_1(P) = \text{valor mínimo de la curvatura normal,}$$
$$\kappa_2(P) = \text{valor máximo de la curvatura normal.}$$

En el caso del plano y de la esfera, ambos valores coinciden, ya que, como hemos visto, la curvatura normal de un plano es siempre cero y la curvatura normal de una esfera de radio r es siempre $1/r$, independientemente de la dirección tangente elegida, por lo que se tiene

$$\kappa_1(P) = \kappa_2(P) = 0$$

en el plano y

$$\kappa_1(P) = \kappa_2(P) = \frac{1}{r}$$

en la esfera. En particular, cualquier dirección tangente en el plano o en la esfera es una dirección principal, pero esto no es lo habitual.

Por ejemplo, si la superficie considerada es un cilindro de radio r, como el de la figura 5, entonces la dirección correspondiente a la de mínima curvatura es la del eje de cilindro, cuya sección normal es una recta y por tanto su curvatura normal es

$$\kappa_1(P) = 0 = \text{valor mínimo de la curvatura normal.}$$

Por su parte, la dirección correspondiente a la de máxima curvatura es la de la circunferencia del cilindro, perpendicular a su eje, con curvatura normal dada por

$$\kappa_2(P) = \frac{1}{r} = \text{valor máximo de la curvatura normal}$$

(Figura 17). Cualquier otra sección normal del cilindro es una elipse (Figura 18), con curvatura comprendida entre 0 (mínimo) y $1/r$ (máximo).

En general, se dice que un punto P de una superficie es un punto *umbilical* cuando las dos curvaturas principales de la superficie en dicho punto coinciden,

$$\kappa_1(P) = \kappa_2(P).$$

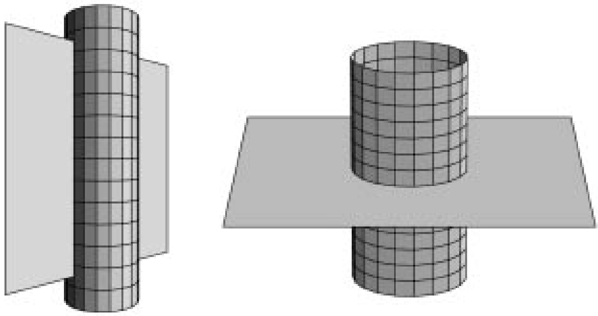


Figura 17. Direcciones principales de un cilindro.

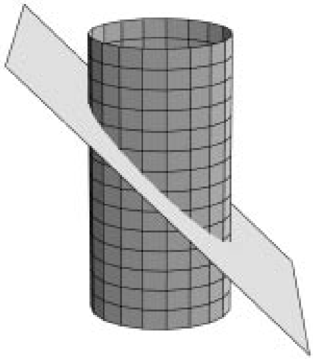


Figura 18. Sección normal de un cilindro.

Por lo tanto, en un punto umbilical la superficie se dobla igual en todas las direcciones tangentes, ya que la curvatura normal de la superficie en dicho punto es la misma en todas sus direcciones tangentes. Por ejemplo, como hemos visto anteriormente, todos los puntos de un plano son puntos umbilicales, con la misma curvatura normal cero. Del mismo modo, todos los puntos un esfera de radio r son puntos umbilicales, con la misma curvatura normal $1/r$. Esta propiedad caracteriza a ambas superficies, en el sentido de que *las únicas superficies que tienen todos sus puntos umbilicales son los planos y las esferas*. Por su parte, el cilindro no tiene ningún punto umbilical.

A partir de las curvaturas principales de la superficie en un punto P, podemos definir dos nuevas magnitudes, su suma

$$\kappa_1(P) + \kappa_2(P)$$

y su producto

$$\kappa_1(P) \text{ x } \kappa_2(P).$$

La primera (dividida por 2) da lugar a la llamada *curvatura media* de la superficie en el punto P,

$$H(P) = \frac{\kappa_1(P) + \kappa_2(P)}{2},$$

que no es más que la media aritmética de las curvaturas principales, mientras que el producto da lugar a la llamada *curvatura de Gauss* de la superficie en P,

$$K(P) = \kappa_1(P) \text{ x } \kappa_2(P)$$

en honor al insigne matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855), uno de los padres de la geometría diferencial. Precisamente a Gauss le debemos una segunda aproximación a la idea de curvatura, con un bonito contenido geométrico, que describiremos más adelante.

Estas dos magnitudes, la curvatura media y la curvatura de Gauss, son las dos curvaturas fundamentales de una superficie y son radicalmente distintas. En efecto, la curvatura media es una cantidad geométrica *extrínseca*, en el sentido de que su valor depende de cómo la superficie *esté metida en el espacio tridimensional*. Dicho de otra forma, una misma superficie puede meterse en el espacio euclídeo de diferentes maneras y con distintos valores para su curvatura media[7]. El hecho de que la curvatura media sea algo extrínseco implica también que no podría ser percibida por los supuestos habitantes bidimensionales que vivieran sobre la superficie. En contraste, la curvatura de Gauss es una cantidad geométrica *intrínseca*, es decir, no depende de cómo la superficie esté metida en el espacio euclídeo, sino que únicamente depende de la geometría propia de la superficie. Este resultado, conocido

---

7 Para justificar esta afirmación deberíamos precisar qué entendemos por *meter una misma superficie de diferentes maneras*, y esto no es fácil. No obstante, para tener una idea de ello, señalemos que el plano y el cilindro (como los entendemos intuitivamente y como los hemos mostrado en las figuras 1 y 5), se corresponden con dos maneras diferentes de meter una misma superficie (el plano) en el espacio con distintos valores para su curvatura media.

en la literatura como el *Theorema Egregium* de Gauss, resulta muy sorprendente, ya que el proceso por el que hemos llegado a la curvatura de Gauss, a través de las secciones normales, de las curvaturas normales y de las curvaturas principales, es puramente extrínseco: depende esencialmente de que nuestra superficie *vive* en un mundo euclídeo tridimensional desde donde la podemos contemplar y observar cómo se curva. Sin embargo, el *Theorema Egregium* de Gauss nos garantiza que, a pesar de ello, la curvatura de Gauss es intrínseca, de manera que un supuesto habitante bidimensional de nuestra superficie podría conocer el valor de dicha curvatura sin necesidad de salir de su mundo bidimensional.

Como hemos indicado anteriormente, tenemos una segunda aproximación a la idea de la curvatura de Gauss que se debe al mismo Gauss y que apareció publicada en su trabajo *Disquisitiones generales circa superficies curva* (1828), considerado el trabajo fundacional de la geometría diferencial clásica, y en donde aparece también su ya nombrado *Theorema Egregium*. Esta otra aproximación está basada en el concepto de *área* de una superficie, algo claro e intuitivo en el que no nos vamos a detener, y en el de su *imagen esférica*. La imagen esférica de una superficie se describe matemáticamente a través de la llamada *aplicación de Gauss* y es una medida de la variación de la dirección normal a lo largo de la superficie. De alguna manera, la imagen esférica de una superficie arbitraria es una porción de una esfera de radio unidad que es tan grande cuanto más se curva la superficie. De hecho, dado un punto P de una superficie, consideremos la dirección normal a la superficie en dicho punto. Esta dirección viene determinada por su *vector director* $N(P)$, que es un vector de longitud unidad en la dirección normal. Dicho vector $N(P)$, trasladado al origen, *puede pensarse* como un punto en la esfera de radio unidad. La aplicación de Gauss es entonces la aplicación que asocia a cada punto P de la superficie su correspondiente punto $N(P)$ en la esfera unidad (Figura 19). Intuitivamente, la forma de la superficie viene determinada por la manera como varía el plano tangente a la superficie en cada punto o, equivalentemente, por la manera como varía su dirección normal. De ahí el interés de la aplicación de Gauss. Así por ejemplo, la imagen esférica de un plano se reduce a un punto de la esfera unidad, la de un cilindro es todo un ecuador de la esfera, y la de un esfera es toda la esfera unidad.

La manera en que Gauss introdujo la curvatura de la superficie es la siguiente. Fijado un punto P de la superficie, consideremos un trocito de su-

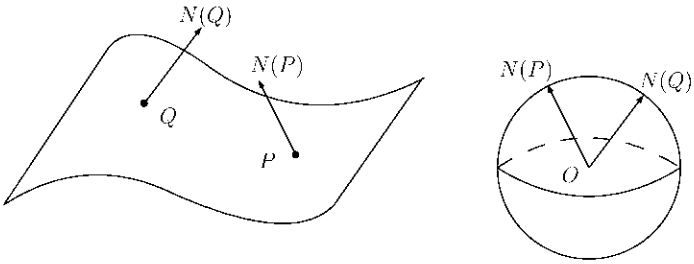


Figura 19. La aplicación de Gauss.

perficie $\mathcal{U}(P)$ que contenga al punto P en su interior y consideremos también el trocito de esfera unidad determinado por las direcciones normales en cada uno de los puntos de $\mathcal{U}(P)$, es decir, su correspondiente imagen esférica, $N(\mathcal{U}(P))$ (Figura 20). En esta situación, podemos considerar el área del trocito de superficie $\mathcal{U}(P)$ y el área de $N(\mathcal{U}(P))$, siendo esta última el área de un trocito de esfera unidad (área esférica). Gauss definió entonces la curvatura de la superficie en dicho punto como el *límite* del cociente entre ambas áreas, cuando el trocito de superficie considerado $\mathcal{U}(P)$ se va haciendo cada vez más pequeño alrededor del punto P, es decir,

$$\lim_{\mathcal{U}(P)\to P} \frac{\text{Área esférica de } N(\mathcal{U}(P))}{\text{Área de } \mathcal{U}(P)}.$$

Se puede comprobar entonces que el valor de este límite es exactamente el de la curvatura de Gauss antes descrita, salvo el signo.

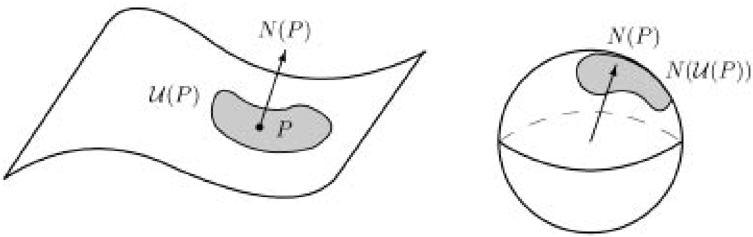


Figura 20. La imagen esférica.

Precisamente, y para terminar, señalemos que el signo de la curvatura de Gauss en un punto P tiene un claro significado geométrico y proporciona información sobre la posición relativa de la superficie con respecto a su plano tangente cerca del punto. En concreto, en los puntos donde la curvatura de Gauss es positiva, $K(P) > 0$, resulta que la superficie, cerca de P, se encuentra contenida en uno de los lados determinados por su plano tangente en dicho punto. Tales puntos se llaman *puntos elípticos* (Figura 21). Por el contrario, en los puntos donde la curvatura de Gauss es negativa, $K(P) < 0$, se tiene que la superficie cruza el plano tangente, ya que siempre tiene algún trozo cerca de P a ambos lados del plano tangente. Estos puntos se llaman *puntos hiperbólicos* o *puntos de silla*, porque la superficie, cerca de ellos, se parece a una silla de montar (Figura 22). Por desgracia, en los puntos donde la curvatura de Gauss se anula, $K(P) = 0$, los llamados *puntos parabólicos*, no podemos decir *a priori* nada sobre esta posición relativa.

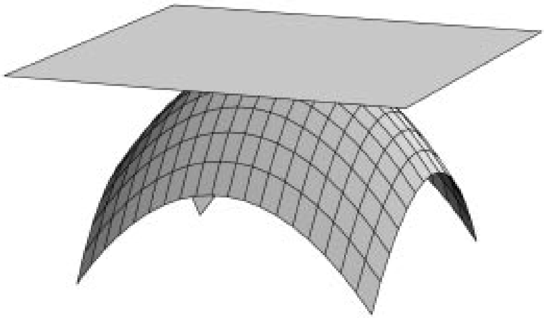


Figura 21. Punto elíptico.

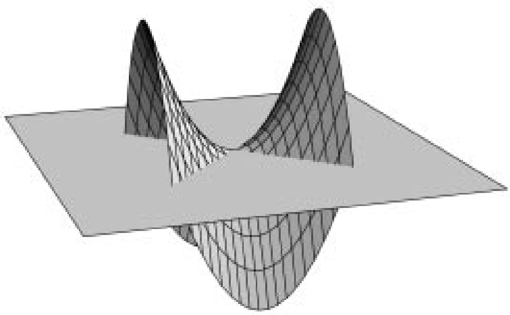


Figura 22. Punto hiperbólico.

– 6 –
SUPERFICIES DE CURVATURA MEDIA CONSTANTE

Volviendo al enunciado del teorema de Aleksandrov, pasemos a continuación a analizar la expresión *curvatura media constante*. Decir que una superficie tiene curvatura media constante es simplemente decir que el valor de su curvatura media en cada punto, $H(P)$, es el mismo en todos ellos, con independencia del punto elegido P. Esto ocurre por ejemplo en el caso en que la superficie considerada sea un plano. En efecto, en tal caso sabemos que las curvaturas principales son cero en todos sus puntos, de manera que en todo punto P de un plano se tiene

$$\kappa_1(P) = \kappa_2(P) = 0 \quad \text{y} \quad H(P) = \frac{0+0}{2} = 0.$$

Es decir, el valor de la curvatura media de un plano es siempre cero. Por otra parte, si la superficie considerada es una esfera de radio r, entonces sabemos que las curvaturas principales también coinciden en todos sus puntos y su valor es justamente el de la curvatura de una circunferencia del mismo radio r, de manera que en todo punto P de dicha esfera tenemos que

$$\kappa_1(P) = \kappa_2(P) = \frac{1}{r} \quad \text{y} \quad H(P) = \frac{1/r + 1/r}{2} = \frac{1}{r}.$$

Por lo tanto, la esfera de radio r también tiene curvatura media constante, y distinta de cero, en todo punto. Finalmente, otro ejemplo sencillo de superficie con curvatura media constante es el cilindro. De hecho, ya hemos visto cómo en cada punto de un cilindro de radio r sus curvaturas principales viene dadas por

$$\kappa_1(P) = 0 \quad \text{y} \quad \kappa_2(P) = \frac{1}{r},$$

por lo que su curvatura media es

$$H(P) = \frac{0 + 1/r}{2} = \frac{1}{2r}.$$

Las superficies de curvatura media constante aparecen en la naturaleza como superficies cuya forma es óptima en algún sentido. Así, por ejemplo, las superficies de curvatura media cero (como es el caso del plano) las podemos observar en las películas de jabón. Si sumergimos una estructura de alambre en una solución jabonosa, entonces la película de jabón que se forma adquiere la forma óptima de una superficie de curvatura media cero en todos sus puntos. Esto se debe a que la película de jabón adopta la forma de la superficie de mínima área de entre todas las superficies bordeadas por dicha estructura de alambre. Del mismo modo, las pompas de jabón adquieren la forma óptima para la cual, siendo el volumen encerrado por la pompa una cantidad fija, el área de la superficie de la pompa sea la menor posible. Desde el punto de vista matemático, esto se traduce en que las pompas de jabón son superficies de curvatura media constante. La justificación física de este fenómeno está en la *ecuación de Laplace-Young*, en honor del matemático francés Pierre Simon Laplace (1749-1827) y del físico inglés Thomas Young (1773-1829), la cual establece que la diferencia de presión entre ambos lados de una película o de una pompa de jabón viene dada por el producto de la tensión superficial y la curvatura media de la superficie que se forma.

Por este motivo, las superficies de curvatura media constante están estrechamente relacionadas con uno de los problemas más antiguos de la geometría, el llamado *problema isoperimétrico* (*isos* = igual, *perímetro* =longitud del contorno). Por simplicidad, analicemos dicho problema en su versión más sencilla, es decir, para el caso de curvas planas. En este caso, el problema consiste en determinar, de entre todas las curvas planas cerradas de longitud fija, cuál es aquella que encierra mayor área. Equivalentemente, de entre todas las curvas planas cerradas que encierran un área fija, encontrar aquella que tiene menor longitud. Como la intuición a todos nos señala, la solución de este problema es la circunferencia[8]. Este problema se conoce también como el *problema de la reina Dido*, por su relación con una historia sobre la reina Dido, fundadora de Cartago, que se nos relata en *La Eneida* de Virgilio[9].

Los griegos ya conocían el problema isoperimétrico e intuían, como cualquiera, que la solución debía ser la circunferencia. De hecho, la primera demostración de la propiedad isoperimétrica de la circunferencia se debe al matemático griego Zenodoro (200-140 A.C.) y se encuentra recogida en el comentario de Teon de Alejandría al *Almagesto* de Ptolomeo, así como en las obras completas de Papus. Sin embargo, la demostración de Zenodoro tenía un error y el problema, aparentemente sencillo, se mantuvo sin solucionar hasta la segunda mitad del siglo XIX, cuando el matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897) proporcionó una demostración completa en sus clases de la Universidad de Berlín[10].

La propiedad isoperimétrica de la circunferencia se encuentra contenida en la llamada *desigualdad isoperimétrica*, que proporciona una desigualdad óptima entre la longitud de una curva plana cerrada y el área del dominio plano encerrado por ella (Figura 23).

---

8 En su versión bidimensional, para superficies del espacio, el problema isoperimétrico consiste en determinar, de entre todas las superficies que encierran un volumen fijo, cuál es la que tiene menor área. De nuevo, la intuición nos dice que la solución debe ser la esfera.

9 Dido fue una princesa fenicia de la ciudad de Tiro que tuvo que huir cuando su hermano, el rey Pigmalión, asesinó a su marido para usurpar sus posesiones y tomar el poder. Dido huyó de Tiro en barco, acompañada por algunos de sus leales de las mejores familias, hasta llegar a las costas de África, donde intentó comprar algo de terreno al jefe indígena para que ella y su gente pudieran asentarse y establecerse de nuevo. Después de algunas negociaciones, cerraron el trato acordando que Dido ocuparía sólo aquel *trozo de tierra que pudiera abarcar con la piel de un buey*. Dido se aprovechó de la situación. En primer lugar, interpretó la palabra *abarcar* en su sentido más amplio. A continuación hizo que su gente cortara la piel en tiras muy finas y las ató, formando una cuerda cerrada de gran longitud. Finalmente, extendió la cuerda sobre el suelo formando una circunferencia, de manera que encerrara en su interior la mayor superficie posible. De esta manera Dido consiguió espacio suficiente sobre el que fundó una ciudad a la que llamó *Qart Hadast*, que significa *Ciudad Nueva* (Cartago).

10 Posteriormente a la demostración de Weierstrass se han encontrado otras demostraciones más sencillas y directas como, por ejemplo, las aportadas por matemáticos de la talla de Hurwitz (1901), Minkowski (1903), Lebesgue (1906), Carathéodory y Study (1910), Blaschke (1916 y 1930), Bonnesen (1929) y otros autores. No obstante, estas demostraciones *sencillas* son aún complicadas y requieren de una fuerte formación matemática para comprenderlas. Resulta sorprendente comprobar cómo un problema aparentemente tan sencillo como éste y para el que todos podemos intuitivamente adivinar cuál es su solución haya permanecido tantos siglos sin resolver y que su solución sea tan complicada.

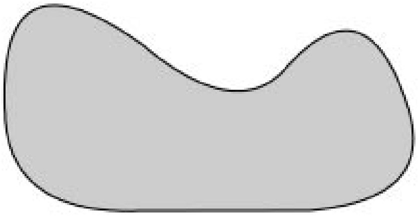


Figura 23. Dominio plano encerrado por una curva cerrada.

En concreto, para cualquier curva plana cerrada de longitud L, se cumple que

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi},$$

donde A representa el área del dominio plano encerrado por ella y π es el número irracional pi (π=3.1415926535897…). Además, se da la igualdad únicamente cuando la curva es una circunferencia. Equivalentemente, la longitud L del contorno de un dominio plano de área A verifica

$$L \geq 2\sqrt{\pi A},$$

dándose la igualdad precisamente cuando el dominio es un círculo. En la tabla adjunta recogemos los distintos valores del área encerrada por un polígono regular cerrado con una longitud fija de 1 metro en función del número de lados del polígono. Observamos cómo conforme aumenta el número de lados, aumenta el área encerrada, hasta llegar al caso extremo de la circunferencia (como polígono regular de infinitos lados), con área máxima.

Polígono	**Número de lados**	**Perímetro**	**Área encerrada**
Cuadrado	4	1 m	0.0625 m^2
Hexágono	6	1 m	0.0721688 m^2
Octógono	8	1 m	0.0754442 m^2
Dodecágono	12	1 m	0.0777511 m^2
Isodecágono	20	1 m	0.0789219 m^2
Circunferencia	∞	1 m	0.0795775 m^2

Análogamente, en la tabla siguiente se muestra el proceso inverso. En ella recogemos los distintos valores del perímetro de un polígono regular cerrado que encierra un área fija de 1 metro cuadrado en función del número de lados. Observamos ahora cómo conforme aumenta el número de lados, disminuye la longitud del perímetro, hasta llegar al caso extremo de la circunferencia, con longitud mínima.

Polígono	**Número de lados**	**Área encerrada**	**Perímetro**
Cuadrado	4	1 m^2	4 m
Hexágono	6	1 m^2	3.72242 m
Octógono	8	1 m^2	3.64072 m
Dodecágono	12	1 m^2	3.5863 m
Isodecágono	20	1 m^2	3.5596 m
Circunferencia	∞	1 m^2	3.54491 m

La propiedad isoperimétrica de la circunferencia tiene muchas y muy interesantes consecuencias físicas. Así, por ejemplo, es la justificación matemática de por qué las gotas de aceite que observamos flotando en el agua son circulares, ya que las fuerzas moleculares del aceite generan un figura de perímetro mínimo, para minimizar la energía. Otra consecuencia interesante tiene que ver con el sonido musical producido por la membrana de un tambor. En efecto, la frecuencia principal de la membrana depende inversamente de su área: al aumentar el área de la membrana, disminuye la frecuencia principal. Una vez fijada el área, sería interesante saber qué forma debe tener la membrana para que la frecuencia principal sea la más baja. En 1877, Sir Lord Rayleigh (1842-1919) comprobó *experimentalmente* que la forma óptima era la circular, en el sentido de que las membranas circulares minimizan la frecuencia principal de entre todas las membranas de la misma área. La justificación matemática de que en efecto esto es así se obtuvo casi 50 años después, gracias al trabajo de los matemáticos Georg Faber (1877-1966) y Edgar Krahn (1894-1961), y depende esencialmente de la propiedad isoperimétrica de la circunferencia.

– 7 –

EL TEOREMA DE ALEKSANDROV, LA CONJETURA DE HOPF Y LOS TOROS DE WENTE

Estamos ya en condiciones de enfrentarnos de nuevo al enunciado del teorema de Aleksandrov, con una perspectiva diferente a la que teníamos al principio de estas notas.

Teorema (Aleksandrov, 1958) *Las únicas superficies cerradas y embebidas de curvatura media constante en el espacio euclídeo son las esferas.*

Observamos, no obstante, que todavía quedan algunos términos oscuros que necesitan de alguna explicación. Como todo resultado matemático, el teorema de Aleksandrov tiene unas *hipótesis* de partida a partir de las cuales se pretende llegar a una conclusión o *tesis*. La tesis del teorema está clara: *la superficie debe ser una esfera*. En cuanto a las hipótesis, tenemos que distinguir entre dos tipos. Por una parte, hay una hipótesis de carácter geométrico que hemos estado analizando en profundidad: *curvatura media constante*. Pero aparecen también otras dos hipótesis que no hemos tratado aún: *superficie cerrada* y *superficie embebida*.

Estas dos hipótesis son de naturaleza *topológica*. De una manera imprecisa e informal, podríamos decir que la *topología* es la geometría más primitiva, en el sentido de que desde el punto de vista topológico no existen distancias, ni ángulos, ni áreas, ni medidas, sino sólo *formas*. Dos objetos son topológicamente equivalentes (es decir, tienen la misma forma topológica) si se pueden deformar el uno en el otro, como si fueran hechos de *plastilina*, sin cortarlos ni romperlos. Así, por ejemplo, desde el punto de vista topológico no podemos diferenciar un balón de fútbol de un balón de un rugby, ya que achatando convenientemente un balón de fútbol hecho de *plastilina*, obtenemos uno de rugby.

Que una superficie sea *cerrada* quiere decir simplemente que sea *compacta*, es decir que no se vaya al infinito, y que no tenga *fronteras*. Un plano (infinito) sería un ejemplo de una superficie que no es cerrada en este sentido, ya que no es compacta sino que se va al infinito. Igualmente, un disco plano de radio r (con borde) sería un ejemplo de una superficie compacta que no es cerrada, ya que tiene una frontera, su borde, la circunferencia de radio r. Por contra, la esfera, el elipsoide y el toro son ejemplos de superficies cerradas.

En cuanto a la segunda de nuestras hipótesis topológicas, superficie *embebida*, se refiere a que las superficies que estamos considerando (y las que hemos estado estudiando a lo largo de todas estas notas) son superficies que no se cortan a sí mismas, es decir, superficies *sin autointersecciones*. El concepto de superficie embebida es algo más complicado de explicar, porque las superficies que habitualmente vemos o nos imaginamos son todas ellas embebidas. Sin embargo, tiene sentido considerar superficies que no son embebidas, sino que se retuercen sobre sí mismas y se cortan a lo largo de aristas curvilíneas. Este otro tipo de superficies es lo que llamamos *superficies inmersas* (Figura 24) y son más complicadas de tratar.

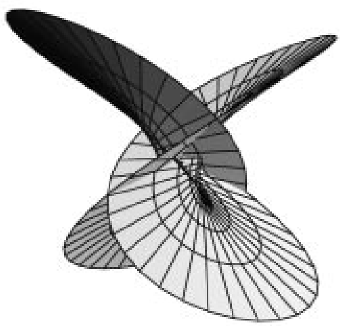


Figura 24. Superficie inmersa.

Por lo tanto, lo que el teorema de Aleksandrov afirma es que una superficie (embebida, es decir, lo que habitualmente entenderíamos por superficie) que no se vaya al infinito y no tenga fronteras, y que tenga la misma curvatura media en todos sus puntos debe ser necesariamente una esfera. En consecuencia, las pompas de jabón son *necesariamente* redondas.

No obstante, sabemos que existen otros tipos de superficies, las que hemos llamado superficies inmersas, a las cuales permitimos retorcerse sobre sí mismas y cortarse. Resulta entonces natural preguntarse si el resultado se mantendrá cierto para este tipo más general de superficie. Este tipo de preguntas es el que los matemáticos nos hacemos habitualmente. Una vez que conocemos un resultado, nos preguntamos hasta qué punto las hipótesis de partida son las hipótesis óptimas. Esto es importante, porque puede ocurrir a veces que estemos considerando hipótesis innecesarias o superfluas, o también que el resultado pueda seguir siendo cierto bajo hipótesis más débiles.

En este sentido, durante mucho tiempo se pensó que el teorema de Aleksandrov debería ser cierto también para superficies cerradas (es decir, compactas y sin borde) e inmersas con curvatura media constante. De hecho, en 1951, es decir, 7 años antes de que Aleksandrov demostrara su teorema, el matemático alemán Heinz Hopf (1894-1971) ya había probado esto para el caso de superficies cerradas e inmersas con la topología más sencilla, esto es, con la topología de una esfera (superficies sin agujeros). Por esa razón, después de que Aleksandrov demostrara su resultado para superficies embebidas (con o sin agujeros), se acentuó la creencia de que debería ser igualmente cierto para superficies inmersas *con agujeros*. Dicho de otra manera, se pensó que la hipótesis de que la superficie fuera *embebida* era una hipótesis superflua, que podría reemplazarse por la hipótesis más débil de que fuera simplemente *inmersa*. Este interrogante pasó a la literatura como la *conjetura de Hopf* y durante muchos años se mantuvo como un problema sin resolver, lo que se conoce como un *problema abierto*, a pesar de los esfuerzos de muchos matemáticos por resolverlo. Finalmente, en 1986 el matemático estadounidense Henry Wente, sorprendentemente y en contra del consenso general, dio una respuesta negativa a esta cuestión, al descubrir los primeros ejemplos de superficies cerradas con un agujero (toros) que son inmersas con curvatura media constante y que, evidentemente, no son esferas: los famosos *toros de Wente*. Después de 35 años resulta que... ¡la conjetura de Hopf es falsa! Posteriormente, basándose en el trabajo de Wente, otros investigadores han descubierto ejemplos más complicados de superficies cerradas inmersas con curvatura media constante que no son esferas, con un número arbitrario de agujeros, lo que llamamos superficies de *género mayor*[11].

---

11 El lector interesado puede consultar la galería de superficies de curvatura media constante del *Center for Geometry, Analysis, Numerics and Graphics* de la Universidad de Massachusetts, http://www.gang.umass.edu/gallery/cmc/, así como la galería de toros de curvatura media constante de Matthias Heil, en la Universidad Técnica de Berlín, http://www-sfb288.math.tu-berlin.de/~matt/.

No obstante, por suerte para los matemáticos, en relación al teorema de Aleksandrov, aún quedan muchas preguntas por responder: ¿Qué ocurre si consideramos superficies *con borde*? (superficies tipo casquete esférico) ¿Y en el caso de superficies que se vayan al infinito? (superficies no compactas) ¿Y si trabajamos en otros espacios ambiente más complicados? Muchas de estas preguntas tienen interés por su relación con diversos problemas de la Física, la forma del Universo, etc. Otras simplemente tienen interés por su propia belleza matemática. Lo importante es que los matemáticos seguimos investigando con la ilusión de comprender cada vez mejor el mundo que nos rodea y con la esperanza de que nuestro trabajo perdure y contribuya al avance de la ciencia, porque, como ya dijo el genial Galileo Galilei, *"las Matemáticas son el lenguaje en el que está escrito el gran libro de la Naturaleza"*.

APÉNDICE:
DISCURSO DE AGRADECIMIENTO

Excelentísimo Sr. Consejero de Ciencia, Tecnología, Industria y Comercio, y Presidente de la Fundación Séneca.

Excelentísimo Sr. Consejero de Agricultura, Agua y Medio Ambiente.

Excelentísimo y Magnífico Sr. Rector de la Universidad de Murcia.

Ilustrísimo Sr. Secretario General de la Consejería de Ciencia, Tecnología, Industria y Comercio.

Ilustrísimo Sr. Director General de Ciencia, Tecnología y Sociedad de la Información.

Excelentísimas e Ilustrísimas autoridades.

Señoras y Señores.

Queridos amigos.

Es para mí un gran honor y una gran satisfacción estar hoy aquí, rodeado de tanta gente querida, para recibir el primer Premio Jóvenes Investigadores de la Región de Murcia. Premio éste que recibo con enorme orgullo y sincero agradecimiento.

Agradecimiento en primer lugar hacia las autoridades e instituciones, representadas aquí en la figura de la Fundación Séneca y de sus patronos, que han tenido la acertada iniciativa de establecer este premio, con el fin de (y cito textualmente) *"estimular y reconocer el esfuerzo de los jóvenes investigadores y divulgar su actividad científica, contribuyendo al tiempo a la generación de una más amplia cultura científica y tecnológica entre la sociedad murciana"*. En una sociedad como la nuestra, en la que se fomenta el éxito fácil y rápido, iniciativas como ésta, a las que por desgracia no estamos demasiado acostumbrados los científicos e investigadores, son dignas de todo elogio. Gracias.

Y agradecimiento también a todas las personas e instituciones que han impulsado y apoyado mi candidatura al premio. En especial, a todos mis compañeros de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Murcia y muy especialmente a mi Decano y a los Directores de Departamento; al Vicerrectorado de Investigación y Nuevas Tecnologías de la Universidad de Murcia; a la Real Sociedad Matemática Española; a la *European Mathematical Society*; al *Institut des Hautes Études Scientifiques* de Francia; al *Centre de Recerca Matemàtica* de Barcelona; a la Academia de Ciencias de la Región de Murcia; y a todas aquellas personas e instituciones que de una u otra manera han hecho posible la concesión de este premio. Gracias.

No sería justo por mi parte cerrar este capítulo de agradecimientos sin hacer una mención expresa a mis maestros, que me llevaron de la mano y supieron guiarme en mis primeros pasos por este difícil mundo de la investigación matemática. Ellos fueron quienes me introdujeron en esta apasionante aventura y, en gran medida, ellos son los culpables de que hoy estemos aquí: los doctores Ángel Ferrández y Pascual Lucas, de la Universidad de Murcia, los doctores Alfonso Romero y Miguel Sánchez, de la Universidad de Granada, y el doctor Bennett Palmer, entonces en la Universidad de Durham, en el Reino Unido, y ahora en la Universidad del Estado de Idaho, en Estados Unidos. Gracias.

Como he dicho al comienzo de mis palabras, me siento enormemente orgulloso del premio recibido. Y me siento orgulloso, especialmente, como matemático. Los matemáticos no estamos acostumbrados a estos reconocimientos, ni siquiera dentro de la propia comunidad científica. Las Matemáticas son difíciles, es verdad. Las Matemáticas son áridas, es verdad. Las Matemáticas son complicadas, es verdad. Pero las Matemáticas también son bellas y pueden ser entretenidas, y nosotros, como matemáticos tenemos la obligación que la sociedad sea consciente de ello. Porque la sociedad necesita de las Matemáticas.

Para terminar, me gustaría dedicar este premio a mi familia. Por una parte a mis padres, ambos profesores de la Universidad de Murcia, que desde pequeño me enseñaron a amar y a vivir el espíritu universitario. Siempre recordaré las palabras de aliento de mi padre, en el verano de 1993, cuando yo me encontraba plenamente inmerso en la redacción de mi tesis doctoral. Yo únicamente quería que mi tesis *fuera la mejor*. *"Mira Luis"*, me dijo mi padre, *"si Dios quiere, sólo espero que tu tesis sea el peor trabajo de investiga-*

ción que hagas, porque eso significará que has sabido progresar y avanzar en el mundo de la investigación". Hoy, por desgracia, él no puede estar en esta ceremonia, pero me consta que está orgulloso de su hijo. Y por otra parte a mi mujer, Carmela, y a mis niñas, Carmelilla, Esperanza y Aurora. Vosotras sois la sufridoras de mi pasión por las Matemáticas. Gracias por comprenderme y apoyarme.

Muchas gracias a todos los asistentes.

REFERENCIAS

[1] A.D. Aleksandrov, *Uniqueness theorems for surfaces in the large V*, Vestnik Leningrad Univ. Math., vol. 13, pp. 5-8, 1958 (en ruso). Traducción al inglés en American Mathematical Society Translations, vol. 21, pp. 412-416, 1962.

[2] C. Andradas y E. Zuazua (coordinadores), *La investigación matemática en España en el periodo 1990-1999*, Real Sociedad Matemática Española, 2002.

[3] M.P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, 1976.

[4] J. Casey, *Exploring curvature*, Vieweg, 1996.

[5] S.S. Chern, *What is geometry?*, American Mathematical Monthly, vol. 97, pp. 679-686, 1990.

[6] L.A. Cordero, M. Fernández y A. Gray, *Geometría diferencial de curvas y superficies con Mathematica*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.

[7] K. Devlin, *El lenguaje de las matemáticas*, Ediciones Robinbook, 2002.

[8] P. Dombrowski, *150 years after Gauss*, Astérisque, vol. 62, 1979.

[9] K.F. Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curva*, Commentationes Societatis Regiae Scientorum Gottingnensis Recentiores, vol. 6, Göttingen 1828. Traducción al inglés de A. Hiltebeitel y J. Morehead en Raven Press Books, 1965. Véase también [8].

[10] D. Hilbert y S. Cohn-Vossen, *Geometry and the imagination*, Chelsea Publishing Company, 1952.

[11] S. Hildebrandt y A. Tromba, *Mathematics and optimal forms*, Scientific American Library, 1985.

[12] H. Hopf, *Differential geometry in the large*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1000, Springer-Verlag, 1989.

[13] J. McCleary, *Geometry from a differential viewpoint*, Cambridge University Press, 1994.

[14] S. Montiel y A. Ros, *Curvas y superficies*, Proyecto Sur, 1997.

[15] E. Muñoz Muñoz, *20 años de ciencia en la Región de Murcia. Análisis bibliométrico*, Academia de Ciencias de la Región de Murcia, 2003.

[16] J. O'Connor y E.F. Robertson, *The MacTutor history of mathematics archive*, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/

[17] J. Oprea, *Differential geometry and its applications*, Prentice-Hall, 1997.

[18] J. Oprea, *The mathematics of soap films: Explorations with Maple*, Student Mathematical Library, vol. 10, American Mathematical Society, 2000.

[19] R. Osserman, *Curvature in the eighties*, American Mathematical Monthly, vol. 97, pp.731-756, 1990.

[20] R. Osserman, *La poesía del universo*, Drakontos, Ed. Crítica, 1997.

[21] J.M. Ruiz Gómez, *Matemáticas: belleza, cultura y utilidad*, Lección inaugural del curso académico 2000-2001, Universidad de Murcia, 2000.

[22] H.C. Wente, *Counterexample to a conjecture of H. Hopf*, Pacific Journal of Mathematics, vol. 121, pp. 193-243, 1986.

REGIÓN DE MURCIA
fundaciónséneca
AGENCIA REGIONAL DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

Región de Murcia
Consejería de Economía,
Industria e Innovación

Plan de Ciencia y Tecnología
Región de Murcia
2003-2006