# Superficies que minimizan el área

Conferencia pronunciada con motivo de la concesión a

# Pablo Mira Carrillo

del Premio Jóvenes Investigadores «Región de Murcia» 2009 convocado por la Fundación Séneca - Agencia Regional de Ciencia y Tecnología





# Pablo Mira Carrillo

SUPERFICIES QUE MINIMIZAN EL ÁREA





## SUPERFICIES QUE MINIMIZAN EL ÁREA

© Pablo Mira Carrillo

 ${\mathbb O}$ Fundación Séneca-Agencia de Ciencia y Tecnología de la Región de Murcia

© Imagen portada: Paul Nylander

Dep. Legal: MU-1.662-2010

Edición realizada para la Fundación Séneca por QUADERNA EDITORIAL Telf. 968 343 050 - quaderna@quaderna.es

Impreso en España. Todos los derechos reservados. Prohibida la reproducción total o parcial sin permiso expreso y por escrito de los titulares del Copyright.

# ÍNDICE

1.	Prólogo	9	
2.	La utilidad de la investigación matemática	11	
3.	Superficies que minimizan el área	15	
	3.1. ¿Qué es una superficie?	15	
	3.2. Nuestro primer problema	21	
	3.3. Una solución de <i>película</i>	22	
	3.4. Ecuaciones para la solución	23	
	3.5. Superficies mínimas	25	
	3.6. Una perspectiva histórica	26	
4.	Superficies que realmente minimizan el área	31	
	4.1. Las superficies mínimas pueden no minimizar	31	
	4.2. ¿Por qué, entonces, son mínimas?	32	
	4.3. Superficies mínimas en la naturaleza	33	
<b>5.</b>	Superficies que se extienden infinitamente	39	
	5.1. Superficies <i>propias</i>	39	
	5.2. El famoso teorema de Bernstein	41	
	5.3. ¿Cuántas superficies propias estables hay?	43	
6.	Superficies mínimas en ambientes homogéneos	45	
	6.1. Ambientes homogéneos	45	
	6.2. El espacio de Heisenberg	47	
	6.3. Soluciones al problema de Bernstein	47	
	6.4. Posibles extensiones y aplicaciones	50	
Bi	bliografía	53	
۸.	Agnadosimientos 50		



# – 1 – PRÓLOGO

Todos hemos jugueteado alguna vez en nuestra vida con objetos sumergidos en agua con jabón, y hemos contemplado con curiosidad las membranas jabonosas que se forman al sacar dicho objeto de la mezcla. Mi intención en esta conferencia es explicar qué matemáticas se ocultan tras estas películas de jabón.



Figura 1.1: Una película de jabón apoyada sobre un alambre. © E. Paolini.

Cuando sumergimos un alambre en agua con jabón, la membrana jabonosa que se forma tiende a minimizar la tensión superficial para alcanzar una posición estable de equilibrio. Y el modo que la membrana usa para aliviar dicha tensión es el de minimizar su área todo lo posible, de modo que el borde de la membrana siga siendo nuestro alambre inicial. Así, de repente, la descripción de nuestra bonita membrana jabonosa se ha convertido en una pregunta con elementos tales como área, borde o

mínimo. Es decir, se ha convertido en un problema matemático, y más concretamente en un problema de geometría.

Las superficies que tienen la propiedad de minimizar el área, al menos cuando el borde es lo suficientemente pequeño, reciben el nombre de superficies mínimas. La investigación de la geometría de las superficies mínimas es una rama importante de las matemáticas, con 250 años de antigüedad pero aún con problemas importantes por resolver.

Mi intención en esta conferencia es explicar algunos de los aspectos más relevantes de dicha teoría desde una perspectiva lo más divulgativa posible. Así, nuestro recorrido irá desde preguntas muy generales tales como ¿en qué consiste la investigación matemática y qué aporta a la ciencia?, o bien ¿qué aplicaciones prácticas puede tener el conocer la forma de una película de jabón?, hasta la descripción de algunos de los teoremas más importantes de la teoría, y terminando con algunas de nuestras investigaciones en este campo.

En su famoso libro *Historia del Tiempo*, Stephen Hawking planteaba que por cada fórmula que se incluya en un texto, el número de lectores descenderá a la mitad. Esto es sin duda un enorme problema cuando uno intenta escribir sobre matemáticas, donde hay fórmulas ocultas tras cada esquina. En cualquier caso, la afirmación de Hawking me ha llevado a intentar escribir matemáticas de modo distinto a como los matemáticos solemos: muy pocas fórmulas, muchos conceptos intuitivos aunque algo faltos de rigor, y muchos dibujos<sup>1</sup>. Porque una de las partes más atractivas de la teoría que vamos a ver es que uno puede dibujar las superficies e intuir geométricamente los resultados. Además, las superficies que aparecen suelen ser de gran belleza, algo natural tratándose de modelos para objetos tan cautivadores como las películas de jabón.

Más allá de los resultados y conceptos expuestos, mi objetivo es explicar a personas de otros ámbitos qué hace un matemático y por qué lo hace, dejando entrever para ello cómo un teorema puede ser *elegante*, o cómo una teoría puede ser *bella*. Y es que esta belleza interna es la que mueve al investigador matemático a enfrentarse a diario con sus propias limitaciones intelectuales, profundizando más y más hasta comprender y así poder descubrir.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Quiero agradecer a Matthias Weber (www.indiana.edu/~minimal/toc.html), a Emanuele Paolini (www.math.unifi.it/~paolini), a Isabel Fernández y a Paul Nylander (www.bugman123.com) por darme permiso para usar algunas de sus figuras.

# LA UTILIDAD DE LA INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA

La investigación en matemáticas es una de las actividades científicas más desconocidas para el público general. Mucha gente sabe en qué consiste y qué papel desempeña la investigación en medicina, biología o ingeniería, pero se sorprende al escuchar el término investigación en matemáticas. Es por ello que, antes de hablar de mi ámbito concreto de investigación, me ha parecido adecuado abordar preguntas tales como ¿de qué va la investigación matemática? o ¿qué aporta dicha investigación al desarrollo científico?¹

#### ¿De qué va la investigación matemática?

La visión que mucha gente tiene de la investigación matemática es la de un señor delante de una pizarra escribiendo fórmulas que nadie entiende. Desde luego, los matemáticos escriben con frecuencia fórmulas complejas en una pizarra, pero la investigación en matemáticas va de hecho mucho más allá.

Las matemáticas trabajan mediante una abstracción de la realidad. ¿Qué significa esto? Primero, empiezan con un problema muy ligado a nuestro entorno real y se centran en unas pocas características suyas desechando las demás. A continuación, estudian y desarrollan dicho problema simplificado. En ese momento ocurren dos cosas. Por un lado, conforme avanza la teoría matemática, su ligadura con el mundo real es

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Por supuesto, lo que aquí escribo es mi visión personal sobre el tema. Algunas excelentes explicaciones de estos aspectos por matemáticos de fama mundial como Tim Gowers o Serge Lang pueden consultarse en la bibliografía.

cada vez más débil. Como contrapartida, esta teoría se vuelve mucho más flexible, y los resultados obtenidos son susceptibles de ser aplicados a problemas de nuestro entorno real muy distintos del problema planteado originalmente.

Pongamos un ejemplo. En casi cualquier rama de la ciencia es necesario entender en algún momento cuándo una cierta magnitud se hace lo mayor posible, o lo menor posible. Este problema, convenientemente matematizado, lleva a la noción de máximo y mínimo de una función de una variable real. A partir de ahí es posible desarrollar una teoría matemática, en este caso, el cómo encontrar los máximos y los mínimos locales de una función derivable. Este problema es estándar en los estudios de secundaria (se calculan los puntos donde la primera derivada se anula, para luego analizar el signo de la segunda derivada o superiores en dichos puntos). Si bien los resultados que se obtienen son abstractos, su rango de aplicación es increíblemente amplio: básicamente, cualquier disciplina científica que precise considerar máximos o mínimos de magnitudes puede beneficiarse de ella.

#### Los beneficios de la abstracción matemática

Un efecto que trae consigo toda esta abstracción es que muchas veces la motivación original de la teoría desaparece casi totalmente. Dicho de otro modo: los matemáticos que trabajan en ella dejan de preocuparse por las posibles aplicaciones que su investigación pueda tener, y sólo se preocupan de seguir desarrollando esta teoría abstracta *ideal*. Esto recuerda la imagen anteriormente comentada del hombre escribiendo fórmulas en la pizarra. No obstante, este modo de progresar en el conocimiento resulta de enorme utilidad a la ciencia como conjunto. Esto se debe a varias razones, de las que me gustaría destacar dos<sup>2</sup>.

(A) Necesidad de modelos más sofisticados. Conforme una disciplina científica va avanzando en el conocimiento, va necesitando a su vez de modelos matemáticos más desarrollados. Esto podemos verlo en ramas como física, química, biología, economía, ingeniería, medicina o

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Otra razón que podríamos señalar es que la investigación matemática es muy barata, pues no requiere laboratorios ni equipos sofisticados. Cada vez que mi suegra Carmen escucha esto me imagina en su terraza, haciendo cuentas con un cuaderno, un bolígrafo y un café.

psicología, entre otras. En otras palabras: la realidad es tan compleja que según vamos entendiéndola poco a poco, las matemáticas necesarias para concretar dicho entendimiento son cada vez más elaboradas. Esto hace necesario en muchos casos disponer de unas matemáticas ya creadas de antemano. En cierto sentido, los matemáticos construyen raíles por los que no saben si pasarán trenes o no, pero que han de estar construidos para que el tren que eventualmente pase por allí no se detenga.

(B) Universalidad de los patrones estéticos matemáticos. Los matemáticos desarrollan su investigación de acuerdo con ciertos patrones estéticos, tales como la simplicidad en el enunciado de los resultados, o la elegancia y profundidad en los argumentos. Por ejemplo, son deseables los resultados que resuelven problemas matemáticos naturales, y lo hacen desvelando propiedades hasta entonces desconocidas de los objetos matemáticos utilizados. Curiosamente (o quizás no tanto), este modo de proceder preserva la utilidad de la matemática para otras ramas científicas, pues las explicaciones que otros científicos buscan en disciplinas aplicadas siguen patrones parecidos.

Por ejemplo, supongamos que un investigador de una rama aplicada descubre que el fenómeno que está estudiando requiere la utilización de matemáticas más avanzadas que las disciplinas clásicas, y deduce qué propiedades aproximadas debería tener dicho modelo. En general, lo que ocurrirá es que dichas propiedades complicarán el modelo, quitándole simetría o imponiendo condiciones adicionales, pero constituirán restricciones naturales desde un cierto punto de vista. Si esto sucede, es muy probable que los matemáticos teóricos hayan estudiado desde una perspectiva abstracta ese mismo modelo, el cual habrá surgido como una generalización natural de una teoría matemática existente anteriormente.

#### La investigación matemática y el desarrollo científico

En resumen, la mayoría de las ramas científicas precisan herramientas matemáticas cada vez más sofisticadas conforme van desarrollándose. Hay veces que éstas han de crearse *ex profeso* llegado el momento, pero otras muchas veces las matemáticas necesarias ya existían de modo abstracto. Ciertamente, el que dichas matemáticas existan de antemano es muy beneficioso para la línea de investigación en cuestión, pues le

permite seguir desarrollándose de manera natural. Por otro lado, al no guiarse la matemática abstracta por sus posibles aplicaciones inmediatas, podría correr el riesgo de no estar creando las matemáticas requeridas por otras ramas científicas. No obstante, los matemáticos desarrollan su investigación siguiendo criterios estéticos y patrones que, históricamente, permiten su aplicación al desarrollo de disciplinas científicas más aplicadas.

Finalmente, parece a priori imposible determinar cuáles son las ramas matemáticas abstractas que tendrán un impacto determinante en el desarrollo de la ciencia y cuáles no<sup>3</sup>.

Por contra, la experiencia nos indica que cuando un resultado matemático resulta útil para la ciencia, éste generalmente ha sido en primer lugar un resultado importante en el ámbito matemático.

 $<sup>^3\,\</sup>mathrm{Por}$ ejemplo, una rama matemática tan abstracta y clásica como la teoría de números ha revolucionado el mundo de las transacciones comerciales por internet.

# SUPERFICIES QUE MINIMIZAN EL ÁREA

#### 3.1. ¿Qué es una superficie?

Empecemos por explicar la noción de superficie, desde dos perspectivas distintas, para acto seguido proponer algunos ejemplos.

**Definición intuitiva:** una superficie es un objeto bidimensional que está curvado de modo suave en el espacio (como una hoja de papel, o una membrana). Aquí, *suave* significa sin picos, ni aristas, ni discontinuidades, ni autointersecciones.

**Definición algo más formal:** una superficie es simplemente un subconjunto del espacio tridimensional  $\mathbb{R}^3$  tal que, localmente alrededor de cada punto, se puede ver como la gráfica de una función diferenciable de dos variables.



Figura 3.1: Las superficies más sencillas: planos, esferas y cilindros.

Por ejemplo, si cogemos una hoja de papel y la doblamos de modo suave, sin producir dobleces, obtenemos una superficie. Podemos ver así que la figura resultante es una porción de plano curvada en el espacio. En este sentido, y ya que el plano tiene dos dimensiones (ancho y largo), podemos decir que la figura obtenida es también bidimensional. Así, ejemplos sencillos de superficies son los planos y los cilindros.

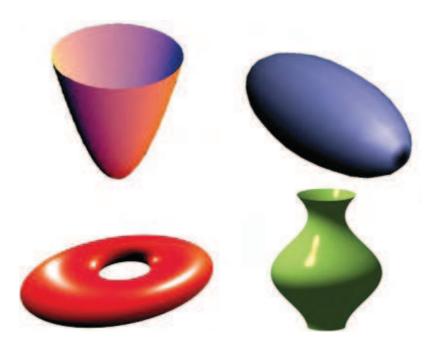


Figura 3.2: Algunos ejemplos sencillos de superficies.

Otros ejemplos sencillos de superficies son las esferas, esto es, el conjunto de puntos del espacio que están a distancia constante positiva R de un punto dado. Otro ejemplo podría ser la corteza de un melón, o la de un donut. En la Figura 3.2 podemos ver algunos ejemplos de superficies en el espacio tridimensional usual, al cual denotaremos como  $\mathbb{R}^3$ .

En general, podemos pensar en una superficie como una membrana elástica curvada en el espacio, de modo que al curvarse no se forman ni singularidades (picos, aristas, discontinuidades) ni autointersecciones. Es conveniente observar que la naturaleza geométrica de una superficie puede ser muy complicada, esto es, no todas las superficies son objetos parecidos a planos, cilindros o esferas. En la Figura 3.3 podemos ver algunos ejemplos más complejos de superficies, los cuales desde un punto

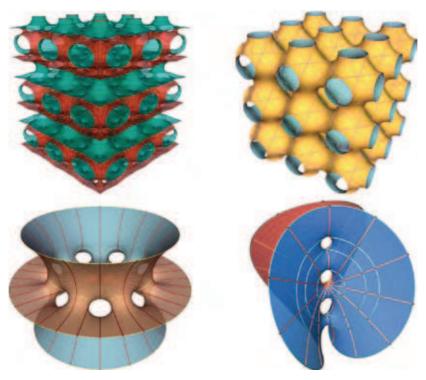


Figura 3.3: Algunos ejemplos de superficies con geometrías algo más complicadas. © M. Weber.

de vista matemático siguen siendo superficies razonablemente sencillas y simétricas.

Vamos a dar algunos ejemplos de objetos que *no* son superficies según nuestra definición. El cubo no es superficie, por tener vértices y aristas. Del mismo modo, el cono o el tetraedro no son superficies. En la Figura 3.4 podemos ver algunos otros ejemplos de objetos que no son superficies, pues poseen singularidades o autointersecciones.

Antes de profundizar más, conviene hacer una aclaración. En realidad, estamos siendo imprecisos con la cuestión de si una superficie tiene borde o no lo tiene. Por ejemplo, cuando hablamos de un cilindro, ¿nos estamos refiriendo a un cilindro infinito, o sólo a una porción finita del cilindro, limitada por dos circunferencias? La realidad es que, para nuestros propósitos, nos basta con decir que en caso de que exista borde, dicho borde no sería parte de la superficie propiamente. Es decir, en el

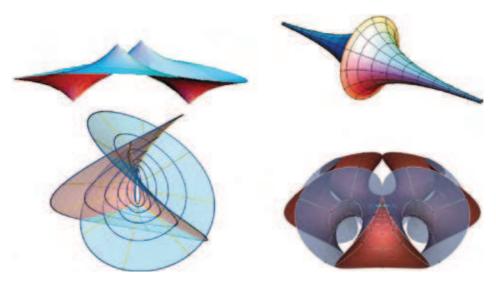


Figura 3.4: Algunos ejemplos de objetos que *no* son superficies. Los dos de abajo tienen autointersecciones (© M. Weber), mientras que los dos de arriba poseen singularidades (vértices o aristas). La figura superior izquierda es por I. Fernández.

caso del cilindro finito, estaríamos considerando todo el cilindro menos las circunferencias inferior y superior.

Realizamos esta aclaración porque en la primera parte de esta conferencia es mejor imaginar una superficie que posee borde, mientras que en la segunda parte hablaremos de superficies que se extienden de modo infinito en el espacio, y que no poseen ningún tipo de borde. Además, como todas las figuras que acompañan al texto son por necesidad finitas, esta ambigüedad podría confundir bastante<sup>1</sup>.

#### Gráficas

Un tipo especial de superficies está dado por las gráficas. El que una superficie sea una *gráfica* es algo fácil de ver geométricamente (véase la Figura 3.9). Significa que existe una dirección del espacio tal que

¹ Siempre recuerdo que un día, tras explicar en clase que una superficie se dice acotada si está en una región finita del espacio, dibujé un plano en la pizarra y pregunté a los alumnos: ¿el plano es acotado? Todos dijeron a coro "Sí". Por supuesto, tenían razón: el plano que acababa de dibujar sin duda era acotado.

toda recta que tenga esa dirección interseca como mucho una vez a nuestra superficie, y lo hace además de modo transversal. Por ejemplo, el hemisferio superior de una esfera es una gráfica (pues toda recta vertical la corta en un punto, como mucho), mientras que una esfera completa no es una gráfica, pues en cualquier dirección que cojamos hay rectas que la cortan exactamente en dos puntos. En la Figura 3.5 podemos ver otras superficies que no son gráficas.

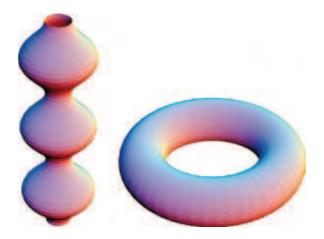


Figura 3.5: Ninguna de estas superficies es una gráfica: en toda dirección existen rectas que las cortan en más de un punto.

Así, toda gráfica tiene una sombra, que es su proyección sobre el plano perpendicular a la dirección considerada (véase la Figura 3.9). Por ejemplo, la sombra del hemisferio superior de una esfera de radio R es un círculo de radio R en el plano horizontal.

Desde una perspectiva más formal, y salvo giros en el espacio, una gráfica es un subconjunto del espacio  $\mathbb{R}^3$  que está definido por una ecuación del tipo

$$z = u(x, y)$$

donde u(x,y) es una función diferenciable definida en una región del plano. Aquí, u nos da la altura sobre el plano, y (x,y) el punto de la sombra en el plano.

#### El área de una superficie

Como objeto bidimensional que es, una superficie tiene un área. Si bien la noción de área es bastante más compleja de lo que uno se imagina a simple vista, para nuestros propósitos nos bastará con decir que el área mide la extensión de la superficie. Intuitivamente, uno puede pensar en el área como la cantidad mínima de pintura necesaria para cubrirla por completo (fijada una unidad de medida adecuada).

Por ejemplo, un círculo de radio R tiene por área  $\pi R^2$ . Del mismo modo, una esfera de radio R tiene por área  $4\pi R^2$ . Un plano o un cilindro (infinito) tiene área infinita. En el caso de una superficie general también existen fórmulas, aunque no tan explícitas y bonitas como las que acabamos de poner aquí, con las que es posible calcular su área. Más importante todavía, dichas fórmulas nos permiten estudiar desde una perspectiva general propiedades del área de las superficies. La siguiente sección es un ejemplo de este estudio.



Figura 3.6: Una curva cerrada en el espacio. © E. Paolini.

#### Curvas cerradas

Una curva cerrada en el espacio es un objeto unidimensional curvado en  $\mathbb{R}^3$  de modo suave, y tal que su extremo inicial y su extremo final coinciden. Por ejemplo, podemos pensar en una circunferencia hecha de alambre, y moldearla a nuestro antojo sin forzarla y romperla.

Es interesante que, dada un curva cerrada en el espacio, podemos considerarla como el borde de una superficie. Por ejemplo, si empezamos con una circunferencia, podemos considerar media esfera cuyo borde sea esta circunferencia. También podríamos considerar el disco plano que delimita dicha circunferencia, y así con una variedad enorme de

20

superficies. Esta será, de hecho, la utilización que haremos de la noción de curva cerrada en el espacio.

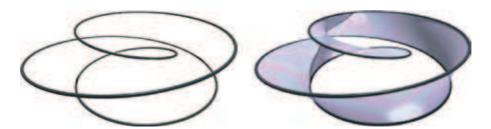


Figura 3.7: Una curva cerrada en el espacio, y una superficie cuyo borde es dicha curva. © E. Paolini.

### 3.2. Nuestro primer problema

Una vez llegados aquí, tenemos todos los elementos necesarios para plantear nuestro primer problema.

**Problema.** De entre todas las superficies cuyo borde es una curva cerrada dada, ¿cuál de ellas tiene el menor área?

En referencia a este problema, el prestigioso geómetra de origen murciano Antonio Ros escribió una vez: Casi todos nosotros aprendimos de estudiantes que en la fórmula  $e^{\pi i}+1=0$  aparecen mágicamente concentrados los números y las operaciones básicas de las matemáticas. De la misma forma, este problema reúne en una sola cuestión varias de las ideas fundamentales de la geometría: curva, superficie, borde y área. Todo en su enunciado es a un tiempo intuitivamente claro y conceptualmente profundo. Detrás de cada palabra hay una teoría matemática completa.

El problema que acabamos de plantear tiene una larga historia detrás: fue enunciado por primera vez por Lagrange en 1760, es decir, hace exactamente 250 años. Más concretamente, Lagrange planteó este problema como un ejemplo de aplicación de una teoría que estaba desarrollando: el método variacional, el cual perseguía encontrar la solución a problemas de mínimos cuando el espacio de posibles soluciones tiene, en principio, dimensión infinita. El problema de mínimo que acabamos de plantear

desde una perspectiva geométrica tiene esa característica: la dimensión del espacio de superficies que se apoyan sobre una curva cerrada dada es infinita (de hecho *muy* infinita en un sentido matemático adecuado). Vamos a explicar algo sobre este método.

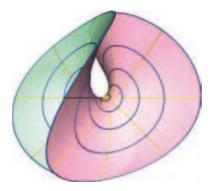


Figura 3.8: Una superficie que se apoya sobre una curva dada. ¿Hay alguna con el mismo borde y menor área? ⓒ M. Weber.

#### 3.3. Una solución de película

Como comentamos en la introducción, el problema de encontrar los máximos y mínimos de una función de una variable f(x) es bien conocido, y se estudia en secundaria. El primer paso para resolverlo es calcular la primera derivada de la función, y encontrar los puntos donde dicha primera derivada se anula. Es decir, resolver la ecuación f'(x) = 0, suponiendo claro está que f es derivable.

En nuestro problema, la magnitud que queremos minimizar es el área de la superficie; es decir, la función f denotaría el área, y x denotaría la superficie en cuestión. Ahora bien, mientras que en el caso estudiado en secundaria x se mueve entre los números reales (dimensión 1), aquí x se mueve entre todas las superficies posibles del mismo borde (dimensión infinita). ¿Qué podemos hacer entonces? La idea es empezar con una superficie  $x_0$ , y tomar una deformación regular suya  $x_t$ , es decir, para cada instante t consideramos una superficie  $x_t$  con el mismo borde que la superficie inicial  $x_0$ . Es decir, estamos haciendo una película continua, donde el primer fotograma es nuestra superficie original, y el resto

22

de fotogramas son superficies que evolucionan a partir de la superficie primera de modo continuo, conservando el borde en todo momento<sup>2</sup>.

Supongamos ahora por un momento que la superficie  $x_0$  es una solución a nuestro problema. Esto es, tiene el menor área de entre todas las superficies cuyo borde es la misma curva cerrada dada. En particular, tendrá menor área que todas las superficies  $x_t$  de la animación que acabamos de realizar. Ahora bien, si llamamos A(t) al área de  $x_t$ , esto quiere decir que  $A(0) \leq A(t)$  para todo t. Pero en este punto, nos damos cuenta de algo importante: A(t)0 depende de la variable tiempo t0, que sólo tiene una dimensión! Es decir, por lo que sabemos desde la enseñanza secundaria, se ha de tener A'(0) = 0.

Recapitulando, si una superficie es una solución a nuestro problema de mínimo, entonces para cualquier animación suya donde cada fotograma sea una superficie que se apoya sobre el mismo borde, se tendrá que la derivada respecto al tiempo de las áreas de dichos fotogramas, en el instante inicial, será cero.

### 3.4. Ecuaciones para la solución

Como dijimos con anterioridad, existen fórmulas matemáticas razonablemente manejables para calcular el área de cualquier superficie. En particular, es posible encontrar cuándo se anula la derivada con respecto al tiempo en el instante cero de las áreas de las superficies fotograma. Esto da una ecuación que la solución a nuestro problema de mínimo debe cumplir, como explicamos a continuación.

Supongamos que la superficie fuese la gráfica de una función de dos variables. Esto es, nuestra superficie es de la forma z = u(x, y) donde u es una función diferenciable definida en un recinto plano (la sombra de la superficie).

Mediante cálculos adecuados, Lagrange demostró que si la derivada de las áreas con respecto al tiempo se anulaba sobre la superficie para cualquier animación suya, entonces la función u(x,y) debería satisfacer la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_xu_yu_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0. (3.1)$$

 $<sup>^2</sup>$  La deformación que estamos realizando ha de cumplir además algunas condiciones técnicas de regularidad, en las que no entraremos.

Aquí  $u_x$ ,  $u_y$  son las derivadas parciales de la función u (esto es, básicamente, derivar u del modo usual respecto de la variable x o de la variable y, respectivamente). Por su parte  $u_{xx}$ ,  $u_{xy}$ ,  $u_{yy}$  son las derivadas segundas de la función u, obtenidas de nuevo siguiendo el mismo proceso.

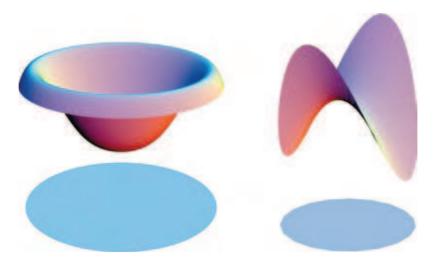


Figura 3.9: Dos ejemplos de gráficas con sus sombras respectivas en un plano horizontal.

Una vez aquí, podemos recordar que la definición formal de superficie pedía que dicha superficie fuese una gráfica alrededor de cualquier punto, con respecto a un plano adecuado. Es decir, para cualquier solución a nuestro problema de mínimo, al escribir la superficie como gráfica sobre un plano alrededor de un punto, la función u que determina dicha gráfica (dada por la altura sobre el plano en cada punto) ha de cumplir la ecuación (3.1). Aquí, x,y serían las coordenadas del plano en cuestión.

Esto da lugar a la siguiente definición.

**Definición.** Una superficie es una superficie mínima si, alrededor de cada punto suyo, la función altura sobre un plano para el que es gráfica cumple la ecuación (3.1).

Este desarrollo muestra que toda superficie que resuelva nuestro problema geométrico de menor área ha de ser, por fuerza, una superficie mínima según la definición anterior.

24

#### 3.5. Superficies mínimas

Las superficies mínimas vienen determinadas por una condición geométrica mucho más bonita y evocadora que la dada por la ecuación (3.1). Dicha condición fue encontrada por Meusnier, también en el siglo XVIII, y establece que la superficie ha de tener curvatura media igual a cero en todos sus puntos<sup>3</sup>. Vamos a explicar qué significa esto.

Tomemos un punto p de una superficie, y fijemos un vector perpendicular a ella en dicho punto. Por simplicidad, supondremos que el vector es vertical y apunta hacia arriba. Ahora, al intersecar la superficie con un plano vertical que pase por p obtenemos una curva plana, y podemos calcular su curvatura. Dicha curvatura mide la rapidez con la que varía la pendiente de la curva con respecto a su longitud en el punto, lo cual claramente nos proporciona una medida sobre cuánto se está curvando dicha curva<sup>4</sup>. Por otro lado, la curvatura tiene un signo, que eludiendo algunos detalles técnicos puede ser pensado en nuestro caso como sigue: es mayor o igual que cero si la curva se está curvando hacia arriba (esto es, hacia la dirección en la que apunta el vector perpendicular), y menor o igual que cero si lo está haciendo hacia abajo.

Pues bien, de este modo podemos asociar a cada plano vertical del espacio una curvatura. El descubrimiento de Meusnier fue que la condición de ser una superficie mínima es equivalente a la siguiente propiedad: en cada punto, la media aritmética entre el mayor valor y el menor valor de todas las curvaturas anteriormente definidas es cero. Dicho de otro modo, si  $k_1$  denota la menor curvatura de entre todas las direcciones horizontales, y  $k_2$  denota la mayor curvatura, entonces  $k_1 + k_2 = 0$ .

Así pues, las superficies mínimas están en una situación de equilibrio perfecto: lo que se curva la superficie en la dirección de su normal se compensa en media con lo que se curva la superficie en la dirección opuesta a su normal. En particular, todos los puntos de la superficie son de tipo silla, lo cual quiere decir que siempre existen puntos a ambos lados de su plano tangente. Por ejemplo, figuras como una esfera o un

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Meusnier realizó sus originales estudios a la temprana edad de 21 años, en lo que constituyó su única contribución a las matemáticas. Poco después, murió en combate durante el sitio de Mainz por el ejército prusiano.

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup> Desde una perspectiva formal, la curvatura de una curva plana es la derivada con respecto a su parámetro arco del ángulo que forma su vector velocidad con respecto a una dirección fija del plano.

elipsoide nunca podrán ser superficies mínimas, pues están totalmente curvadas en una sola dirección.

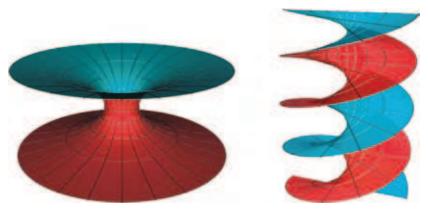


Figura 3.10: El catenoide (izquierda) y el helicoide (derecha) fueron los primeros ejemplos de superficies mínimas que se construyeron, aparte del plano. © M. Weber.

#### 3.6. Una perspectiva histórica

La teoría de superficies mínimas tiene 250 años de antigüedad, pero continúa lejos de estar agotada. Al profundizar en su estudio, los investigadores han comprobado que el gran desarrollo que ya poseía la teoría hace 50 años es sólo la punta del iceberg, y tratan de seguir estudiando dicho iceberg en su totalidad. Por otro lado, la teoría de superficies mínimas ha encontrado sorprendentes conexiones con otras ramas, y es justo decir que constituye uno de los temas centrales de las matemáticas.

Como dijimos anteriormente, la teoría empezó a desarrollarse a partir de las investigaciones de Lagrange (1760) sobre superficies que poseen el menor área posible. En ese momento histórico ya se conocían tres formas geométricas que resultaron ser superficies mínimas. Lagrange observó que el plano es una superficie mínima. Más tarde Meusnier (1776) probó que también lo era el catenoide, esto es, la superficie obtenida al rotar una curva catenaria a lo largo de un eje, descubierta por L. Euler en 1744. Finalmente, de nuevo Meusnier (1776) demostró que también es mínima el helicoide, superficie ya utilizada por Arquímedes, obtenida

26

al realizar un movimiento helicoidal con respecto a un eje de una recta perpendicular a dicho eje.

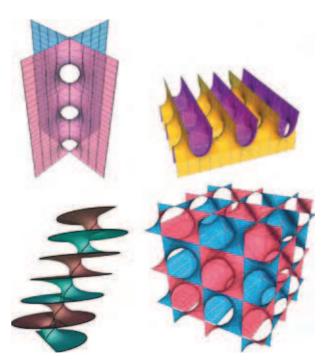


Figura 3.11: Algunas superficies mínimas clásicas: las superficies de Scherk (arriba), y las de Riemann y Schwarz (abajo). © M. Weber.

Durante mucho tiempo, estos fueron los únicos ejemplos conocidos de superficies mínimas. No obstante, en la segunda mitad del siglo XIX la teoría experimentó una revolución, gracias a la aplicación de diversos métodos (separación de variables, funciones de variable compleja) al estudio de las superficies. Esto dio lugar a la edad de oro de la teoría, donde se construyó una gran cantidad de ejemplos, y se dieron muchísimos resultados teóricos sobre el comportamiento de una superficie mínima.

Una segunda edad de oro en la teoría tuvo lugar alrededor de la década de los 1930. En estos años se introdujeron técnicas analíticas y de teoría de la medida en el estudio de las superficies mínimas, las cuales llevaron a la resolución de problemas de la teoría inabordables hasta ese momento. Por ejemplo. Douglas y Radó resolvieron el famoso proble-

ma de Plateau, que preguntaba: dada una curva cerrada en el espacio, ¿cuándo es posible encontrar una superficie mínima que se apoye sobre ella?<sup>5</sup> Douglas recibió en 1936 la medalla Fields por su solución a este problema.

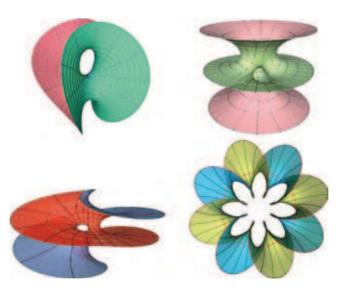


Figura 3.12: Algunas superficies mínimas descubiertas en los últimos 30 años. Por orden, la superficie de Chen-Gackstatter, la superficie de Costa, el helicoide de género uno de Hoffman-Karcher-Wei, y el helicoide circular de Mira-Meeks-Weber. © M. Weber.

En los años 1960, la teoría inició una tercera etapa de desarrollo que dura hasta la fecha, y que muchos han denominado la tercera edad de oro. El inicio de todo fue la recuperación por parte de Osserman de los estudios de los geómetras del siglo XIX, y su posterior aplicación a problemas globales modernos. Este desarrollo abrió la teoría a un gran número de técnicas novedosas que dieron lugar a teoremas de enorme importancia. Por ejemplo, en los últimos años se han resuelto problemas clásicos como la unicidad del helicoide (Meeks, Rosenberg) y de los ejemplos de Riemann (Meeks, Pérez, Ros), y se han desarrollado teorías revolucionarias como la descripción de los posibles límites de superficies

 $<sup>^5\,\</sup>mathrm{La}$  resolución de Douglas y Radó hace referencia al caso de que la superficie es un disco topológico, y permite autointersecciones.

mínimas (Colding, Minicozzi), o la extensión a espacios ambiente generalizados distintos de  $\mathbb{R}^3$ . Volveremos sobre este último punto hacia el final de la conferencia, pues es uno de los aspectos donde hemos realizado algunas contribuciones.

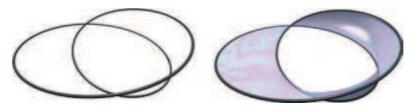


Figura 3.13: Dada una curva cerrada en el espacio, ¿cuándo hay una superficie mínima que se apoya sobre ella? Este es el célebre *problema de Plateau*. © E. Paolini.



# SUPERFICIES QUE *REALMENTE* MINIMIZAN EL ÁREA

#### 4.1. Las superficies mínimas pueden no minimizar

Volvamos por un momento a las matemáticas de enseñanza secundaria. Según decíamos, para encontrar los máximos y mínimos locales de una función de una variable f(x), el primer paso es resolver la ecuación f'(x) = 0. No obstante, un punto  $x_0$  donde se cumpla dicha ecuación, esto es,  $f'(x_0) = 0$ , no es necesariamente un máximo o un mínimo. Es sólo un punto crítico, el cual podría ser por ejemplo un punto de inflexión de la función. Lo que sí que es cierto es el recíproco: todo máximo o mínimo local de la función f(x) deberá cumplir la ecuación  $f'(x_0) = 0$ .

Para decidir si un punto crítico  $x_0$  de la función es un mínimo o no lo es, hay que acudir a la segunda derivada de la función en el punto, esto es, hay que calcular  $f''(x_0)$ . Si dicha cantidad es positiva, f tendrá un mínimo local en  $x_0$ , mientras que en caso de ser negativa, f tendrá un máximo local. En el caso en que  $f''(x_0)$  valga cero, sería necesario seguir analizando el problema para decidir si la función tiene un máximo, un mínimo o un punto de inflexión.

Pues bien, algo parecido sucede con las superficies mínimas. En el capítulo anterior explicamos que dichas superficies aparecen como puntos críticos de nuestro problema de minimizar el área para cualquier animación que hagamos de ella. Es decir, las superficies mínimas son candidatas a ser soluciones de nuestro problema. No obstante, al igual que en el caso de funciones de una variable, el ser punto crítico no garantiza que la superficie sea de hecho un mínimo. Y de nuevo, como en el caso estudiado en el instituto, hay que acudir a la segunda derivada del

área de la animación de la superficie para decidir si ésta tiene de verdad área mínima o no la tiene. En este sentido, conviene introducir una nueva noción: la de superficie mínima estable.

**Definición.** Una superficie mínima  $x_0$  se dice estable si, para cualquier deformación suya  $x_t$  (siendo t un parámetro que puede ser tomado como el tiempo) por superficies con el mismo borde, cumple la siguiente propiedad: si A(t) es el área de  $x_t$ , entonces A''(0) > 0.

Así pues, una superficie mínima es estable si para cualquier animación suya que hagamos por superficies con el mismo borde, el área de dicha superficie será menor que la de cualquier superficie cercana a ella. De ese modo, son las superficies estables las que nos proporcionan la solución a nuestro problema original de menor área<sup>1</sup>.

Existen muchísimos ejemplos de superficies mínimas tanto estables como no estables. El fenómeno más habitual es el siguiente: si tomamos una superficie mínima lo suficientemente pequeña, entonces ésta será estable. No obstante, si es posible extender dicha superficie lo suficiente, en general llegará un momento en el que esta propiedad de estabilidad se pierda.

### 4.2. ¿Por qué, entonces, son mínimas?

A la vista de lo que acabamos de explicar, el término superficie mínima parece muy engañoso. ¿Por qué llamarlas así cuando en realidad muchas de ellas no resuelven nuestro problema original de área mínima? La respuesta es la siguiente: Cualquier porción lo suficientemente pequeña de una superficie mínima es una solución a un problema de área mínima adecuado. Vamos a explicar qué quiere decir esto.

Tomemos una superficie mínima en el espacio, cojamos una porción de ella y olvidemos el resto de la superficie. Esta porción que hemos cogido tendrá un borde, que será la línea por la que hemos recortado la superficie original para tomar esta porción. Podemos suponer que este borde es una curva cerrada en el espacio<sup>2</sup>.

 $<sup>^1</sup>$  De nuevo, aquí existen diversos detalles técnicos en los que no entraremos. Por ejemplo, uno de los problemas que podrían darse es que existan superficies cercanas para las que el parámetro t de la deformación no se pueda hacer uniformemente pequeño.

 $<sup>^{2}</sup>$  En realidad, esta situación no tendría por qué ser así en general, pero si recor-

En estas condiciones, se tiene: Si la porción escogida de la superficie mínima es lo suficientemente pequeña, entonces dicha porción proporciona una solución a nuestro problema de área mínima, para la curva dada por su borde.



Figura 4.1: Esta superficie mínima no es estable pero, al igual que sucede con cualquier otra superficie mínima, toda porción suya lo suficientemente pequeña sí que lo es. © M. Weber.

Una formulación alternativa puede ser la siguiente: tomemos una superficie mínima cualquiera, y elijamos uno de sus puntos. Entonces podemos eliminar una porción suficientemente pequeña de la superficie alrededor de ese punto, de modo que se cumple la siguiente propiedad: si en el hueco que hemos dejado pegamos cualquier otra superficie, dicha superficie tendrá mayor área que la porción eliminada.

Esta propiedad justifica la terminología de superficie mínima.

#### 4.3. Superficies mínimas en la naturaleza

La propiedad que poseen las superficies mínimas de tener, localmente, la menor área posible, hace que dichas superficies proporcionen modelos para problemas naturales.

# Física y películas de jabón

Ya comentamos el descubrimiento de Meusnier de que en una superficie mínima, la media de lo que se curva la superficie en cada punto

tamos un pedazo lo suficientemente pequeño alrededor de un punto, todo esto sí es cierto.

con respecto a cada dirección tangente es exactamente cero. A la media anterior se le llama la *curvatura media* de la superficie. Pues bien, a principios del siglo XIX Laplace y Young desarrollaron la siguiente aplicación de la curvatura media.

Supongamos que tenemos dos fluidos separados por una membrana elástica, y que cada uno de esos fluidos tiene una cierta presión. Entonces la ley de Laplace-Young afirma que la curvatura media de la membrana (vista como superficie) coincide con la diferencia entre las presiones de ambos medios. En particular, la superficie será una superficie mínima si los dos medios que separa la membrana tienen igual presión.

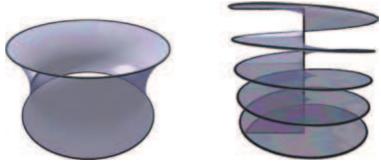


Figura 4.2: Las superficies mínimas proporcionan un modelo para la forma de una película de jabón. © E. Paolini.

Esta interpretación indica, como caso particular, que las superficies mínimas aparecen como modelos a la forma de una película de jabón. Para ello, es necesario que la membrana jabonosa no sea *cerrada*, esto es, que no encierre ningún compartimiento interior (como sucedería en el caso de una burbuja esférica), pues en tal caso la presión a ambos lados de la membrana no sería la misma<sup>3</sup>.

Por tanto, podemos deducir el siguiente criterio empírico para saber si una superficie es una superficie mínima. Tomemos un modelo de nuestra superficie hecho de algún material rígido, quitemos una porción pequeña interior de él, y sumerjamos la superficie restante en agua con jabón.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> En este supuesto, la superficie sería una superficie de curvatura media constante. Al igual que para las superficies mínimas, existe una teoría matemática muy desarrollada sobre superficies de curvatura media constante. Los ejemplos más sencillos son las esferas y los cilindros circulares, pero hay muchos otros.

Entonces, si la superficie es mínima y la porción que hemos quitado de ella es lo suficientemente pequeña, la película de jabón que se forme sustituirá con gran precisión a la porción de superficie que habíamos eliminado.

Aparte de su aplicación como modelo a películas de jabón, la ley de Laplace-Young establece que las superficies mínimas (y más generalmente las superficies de curvatura media constante) aparecen en la descripción de fenómenos de capilaridad y, generalmente, en problemas donde existan membranas dotadas de una energía proporcional a su área.

Por otro lado, la teoría de superficies mínimas convenientemente generalizada ha sido utilizada con frecuencia en investigaciones sobre cosmología y relatividad general. Por ejemplo, estas superficies mínimas generalizadas aparecen en la demostración del teorema de la masa positiva de Schoen-Yau, y proporcionan superficies iniciales sencillas para las ecuaciones de Einstein.

## Química y Biología

De entre la gran variedad de superficies mínimas existentes, muchas de ellas tienen un patrón *laberíntico*, dividiendo al espacio en dos regiones de gran complejidad. En la Figura 4.3 podemos ver algunas de dichas superficies mínimas.

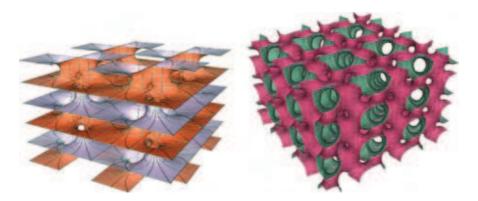


Figura 4.3: Dos ejemplos de superficies mínimas de diseño laberíntico, que proporcionan modelos para estructuras observadas en diversas ramas de la biología y la química. © M. Weber.

35

Pues bien, se ha observado que las formas de dichas superficies mínimas sirven como modelo para otras estructuras laberínticas que aparecen en diversas ramas de la química o la biología: botánica, zoología, areniscas y otros medios porosos, cristales líquidos o polímeros. Citando a Hyde et al. (véase la lista de referencias):

Mediante la consideración de superficies mínimas y otras formas, el exuberante caos de la naturaleza cobra más sentido<sup>4</sup>.

En cualquier caso, la utilización de estas superficies mínimas como modelos son una versión muy simplificada de las estructuras que aparecen.

# Arquitectura y arte



Figura 4.4: El techo del estadio olímpico de Múnich adopta la forma de una superficie mínima. Fuente: Wikipedia.

Las superficies mínimas han sido utilizadas en arquitectura. El ejemplo más característico de su uso es la cubierta del estadio olímpico de

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup> Through a consideration of minimal surfaces and other shapes, the bewildering chaos of nature makes more sense.

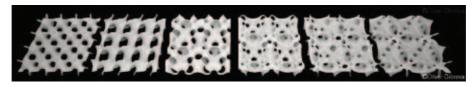


Figura 4.5: Algunas componentes de superficies mínimas usadas por Dibrova en sus diseños. C O. Dibrova.

Múnich, diseñado por Frei Otto. Hay diversas razones que conducen a considerar las superficies mínimas como modelos útiles para ciertas construcciones ligeras. Una de ellas es que, al tener área mínima para un borde dado, la estructura soporta menos peso y por tanto puede conseguirse una sensación de ligereza en la construcción. Otra es que, debido a la caracterización de las superficies mínimas como aquellas en las que todos sus puntos están en un equilibrio perfecto, las construcciones basadas en ellas poseen una considerable estabilidad. Finalmente, al estar realizadas en base a la forma que adopta una película de jabón, las construcciones resultantes son generalmente bellas y llamativas.



Figura 4.6: Diseño de Oliver Dibrova para la sede de la RTV de Zúrich. © O. Dibrova.

En otra línea, el arquitecto Oliver Dibrova ha utilizado superficies mínimas para desarrollar un diseño para la sede de la RTV en Zúrich. En este caso, las formas resultantes no son superficies mínimas propiamente, sino que el arquitecto usa las propiedades de *porosidad* de superficies mínimas periódicas para realizar un estudio espacial de distribución con un alto grado de intercomunicación entre diversas estancias.



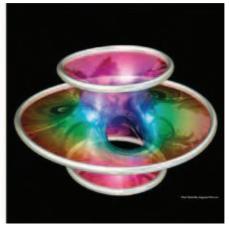


Figura 4.7: Dos diseños de Paul Nylander (www.bugman123.com), basados respectivamente en el helicoide de género uno y en la superficie mínima de Costa. El primero de los diseños no es en sí una superficie mínima, sino que ha sido obtenida tras realizar un cierto tipo de proyección cilíndrica. © P. Nylander.

Este tipo de formas también ha atraído a diversos artistas, tanto escultores como pintores o diseñadores. Muchas veces, el artista busca un equilibrio perfecto en un diseño, y su intuición lo lleva a una forma muy similar a la de una superficie mínima, incluso sin saber que dicho tipo de superficies ya han sido estudiadas con profundidad. Matemáticos como Matthias Weber han desarrollado diversos diseños gráficos de superficies mínimas dentro de un contexto más artístico y menos matemático, y han inspirado a otros artistas con sus modelos. Entre los artistas cuyas creaciones incluyen obras inspiradas en superficies mínimas, podemos citar a Helaman Ferguson, Paul Nylander, Brent Collins, Stewart Dickson o Robert Engman, entre muchos otros.

# SUPERFICIES QUE SE EXTIENDEN INFINITAMENTE

# 5.1. Superficies propias

La mayor parte de lo dicho hasta ahora se refiere a superficies que poseen un borde, o bien a propiedades locales de las superficies. Entendemos por propiedad local de una superficie una característica suya que hace referencia exclusivamente al comportamiento alrededor de un punto, y no a lo que sucede en la totalidad de la superficie. Dicho de otro modo: una propiedad es local si la podemos observar a través de un microscopio que enfoque a la superficie, de modo que sólo veamos una porción de ella. Por ejemplo, la propiedad de estar en equilibrio perfecto alrededor de todos sus puntos, o la de ser una gráfica en una dirección adecuada, son propiedades locales de las superficies mínimas.

A continuación, queremos iniciar el estudio *global* de las superficies mínimas. Esto es, queremos estudiar propiedades que no tienen sentido si las vemos a través de un microscopio, sino que necesitamos ver la totalidad de la superficie para determinar si se cumplen o no.

Más concretamente, nos vamos a preocupar ahora por superficies que no tienen borde, sino que se extienden de modo infinito en el espacio. Esto es claramente una propiedad global, y hay una noción muy sencilla que servirá para formalizarla: la de *superficie propia*.

**Definición.** Una superficie se dice propia si divide al espacio en exactamente dos regiones disjuntas.

Por ejemplo, una esfera es propia, pues divide al espacio en dos regiones: la interior, acotada por ella, y la exterior. Del mismo modo, un

cilindro infinito o un plano dividen al espacio en dos regiones disjuntas, ambas no acotadas.

Podemos ver de este modo que la propiedad de que una superficie sea propia nos indica que ésta encierra una región finita del espacio, o bien se extiende infinitamente en el espacio. En particular, no tiene borde. Otros ejemplos de superficies mínimas propias son el catenoide y el helicoide (Figura 3.10), o las superficies mínimas dibujadas en la Figura 3.11. Por supuesto, en dichas figuras sólo aparece una región de la superficie y no la superficie en su totalidad, lo cual sería imposible de dibujar. Es conveniente observar que los dibujos de estas figuras están en dos colores; estos colores muestran cuáles son las dos regiones en las que la superficie divide al espacio.

Por contra, un cilindro con borde (esto es, la porción del cilindro infinito que queda comprendida entre dos planos paralelos) no divide al espacio en dos regiones. Lo mismo se puede decir de un círculo o de media esfera. En tales casos, uno puede unir dos puntos cualesquiera no pertenecientes a la superficie por una trayectoria que nunca corta a la superficie en sí. Así, las superficies con borde no son propias.

Una vez aquí, podemos plantear una de las preguntas principales en la investigación de las superficies mínimas:

¿Cuál es la forma de una superficie mínima propia?

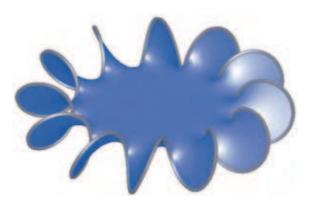


Figura 5.1: La forma de una superficie mínima con borde depende mucho de dicho borde. Esto no sucede con las superficies propias.

Sobre esta pregunta se saben muchísimas cosas, pero también existen hoy en día muchísimos interrogantes. Conviene decir que este problema es muy natural precisamente porque la superficie está exenta de un borde. Dicho de otro modo, si consideramos una superficie mínima con borde, su geometría estará muy influida por la forma de dicho borde: si el borde adopta una forma compleja, la superficie heredará de algún modo dicha complejidad (véase la Figura 5.1).

En lo que queda de sección, presentaremos algunos de los principales resultados conocidos en referencia a la pregunta anterior.

#### 5.2. El famoso teorema de Bernstein

Una gran parte de la teoría global moderna de superficies mínimas tiene como punto de partida el célebre teorema de Bernstein. Dicho teorema tiene más de un siglo de antigüedad (data de 1909), y establece lo siguiente:

Teorema de Bernstein. Las únicas superficies mínimas en  $\mathbb{R}^3$  que son una gráfica entera son los planos.

Vamos a explicar el significado de este teorema, y en particular la noción de gráfica entera.

Ya comentamos con anterioridad qué significa que la superficie sea una gráfica. Geométricamente, recordemos que el hecho de ser gráfica viene descrita por la siguiente propiedad: existe una dirección tal que cualquier recta que apunte en dicha dirección corta a la superficie como mucho una vez, y lo hace siempre de modo transversal. Y dábamos como ejemplo la mitad superior de una esfera, con respecto a la dirección vertical del espacio. Observemos que toda gráfica da lugar a una sombra, que es su proyección sobre el plano perpendicular a la dirección considerada. Cuanto más grande sea la sombra, mayor será la superficie. Por ejemplo, la sombra del hemisferio superior que acabamos de comentar sería un círculo del mismo radio que la esfera, situado sobre un plano horizontal.

Pues bien, una gráfica entera es una gráfica cuya sombra es todo el plano. Alternativamente, una gráfica entera viene dada por la propiedad de que toda recta en una cierta dirección del espacio corta a la superficie exactamente una vez (y no como mucho una vez, como en la definición general de gráfica), y lo hace de modo transversal.

Por ejemplo, un hemisferio no es una gráfica entera, pues su sombra es un círculo. Un cilindro infinito horizontal cortado por su mitad, también horizontalmente, es una gráfica que tampoco es entera: su sombra es en este caso una banda del plano limitada por dos rectas paralelas.

Por su parte, el ejemplo más sencillo de gráfica entera es el de un plano: claramente, si tomamos como dirección la perpendicular a dicho plano, la sombra del plano es él mismo. Alternativamente, es claro que toda recta perpendicular al plano debe cortarlo necesariamente en exactamente un punto.

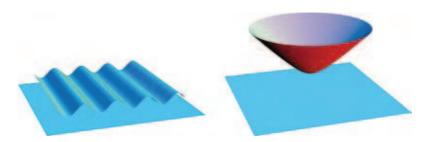


Figura 5.2: Dos ejemplos de gráficas enteras. La superficie se extiende infinitamente, aunque el dibujo sea obviamente finito.

Además del plano, existen otras muchas gráficas enteras, algunas de las cuales hemos dibujado en la Figura 5.2 (de nuevo, sólo hemos dibujado una porción finita suya). Básicamente, lo único que tenemos que hacer para construir una gráfica entera es considerar un plano infinito, y levantarlo de un modo suave en el espacio en la dirección perpendicular al plano, de modo que cada punto se levante a una altura distinta. Es conveniente observar que si una superficie es una gráfica entera, entonces ha de ser una superficie propia. En efecto, cualquier gráfica entera divide al espacio en dos regiones disjuntas: la de arriba y la de abajo.

Una vez aquí, volvamos al teorema de Bernstein. Dicho teorema afirma que las únicas gráficas enteras que son superficies mínimas son los planos. Dicho de otro modo, de entre todas las superficies que cumplen la propiedad de ser una gráfica entera (esto es, que existe una dirección en la cual todas las rectas lo cortan exactamente una vez, y de modo transversal), las únicas que son mínimas son los planos. Anteriormente, se sabía de la existencia de superficies mínimas que son gráficas y cuyas

sombras son muy grandes. El teorema de Bernstein nos dice que, no obstante, si la sombra es lo más grande posible (es todo el plano), entonces la superficie ha de ser un plano.

El teorema de Bernstein tiene todos los ingredientes que lo hacen interesante desde un punto de vista matemático: tiene un enunciado sencillo, una demostración complicada, proporciona una descripción muy precisa y clara de una situación geométrica natural, y además el resultado tiene conexiones con otras disciplinas matemáticas. Vamos a explicar este último hecho desde una perspectiva algo más formal.

Recordemos que una gráfica es, salvo rotaciones del espacio, una superficie de la forma z=u(x,y), donde u(x,y) es una función diferenciable definida en un dominio plano. Cuando dicho dominio es de hecho todo el plano (esto es, cuando u(x,y) está definida para todos los valores de x y de y), la superficie es una gráfica entera. Por otro lado, para que la gráfica sea minima, u(x,y) ha de cumplir la ecuación (3.1) que escribimos anteriormente. Esta ecuación es lo que se conoce como una ecuación en derivadas parciales. Pues bien, el teorema de Bernstein tuvo una gran influencia no sólo en geometría, sino también en el estudio de soluciones de ecuaciones en derivadas parciales que están definidas para todos los valores de sus variables. De hecho, al problema de clasificar este tipo de soluciones para una cierta ecuación en derivadas parciales se le suele llamar el problema de Bernstein asociado a dicha ecuación.

### 5.3. ¿Cuántas superficies propias estables hay?

Para explicar la pregunta de arriba, conviene recopilar un poco de terminología. Una superficie mínima tiene la propiedad de estar en un equilibrio perfecto alrededor de todos sus puntos (curvatura media cero); cualquier trozo suyo lo suficientemente pequeño modela la forma de una película de jabón. Por otro lado, la superficie es *propia* si divide al espacio en dos regiones (en particular, no tiene borde). Finalmente, dijimos que una superficie mínima era estable si la segunda derivada del área para cualquier deformación suya es positiva (y así, es solución a nuestro problema original de menor área).

Los planos cumplen todas estas propiedades. Esto es, los planos son superficies mínimas propias y estables<sup>1</sup>.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Aquí estamos haciendo un abuso de lenguaje, pues la noción de superficie estable

Por otro lado, también es cierto que cualquier gráfica entera mínima será una superficie mínima propia y estable. No obstante, por el teorema de Bernstein que acabamos de ver, las únicas gráficas enteras mínimas son de hecho los planos.

Estos resultados nos llevan a plantearnos la siguiente cuestión:

¿Son los planos las únicas superficies mínimas estables y propias?

La pregunta es muy interesante desde una perspectiva matemática. En efecto, una superficie mínima propia no tiene borde, pero en caso de ser estable tiene la siguiente propiedad universal de minimización de área: para cualquier región con borde de la superficie, esta región tiene área mínima de entre todas las superficies con el mismo borde próximas a ella. La respuesta a esta pregunta es relativamente reciente dentro de una teoría tan antigua, y fue obtenida de modo independiente y básicamente simultáneo por varios autores: do Carmo y Peng (1979), Fischer-Colbrie y Schoen (1980) y Pogorelov (1981), donde el año indica el momento de publicación en una revista especializada<sup>2</sup>.

**Teorema.** Las únicas superficies propias mínimas y estables son los planos.

De este modo, los planos proporcionan la respuesta a una pregunta sobre superficies que *realmente* minimizan el área, pero sin necesidad de considerar ningún tipo de borde en la superficie. Esto es interesante pues, como dijimos anteriormente, el borde determina en gran medida a la superficie, en el sentido de que una superficie con un borde complicado también tiene una forma complicada.

hacía referencia a un borde, mientras que el plano no tiene borde. No obstante, hay una definición adecuada un poco más general con la que esto tiene sentido.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> El resultado que obtuvieron es de hecho más general que el formulado aquí. En efecto, los autores no piden a la superficie que sea propia, sino que sea *completa*. Esto significa que la superficie es infinita en todas direcciones, pero podría intersecarse, o acumularse alrededor de algún punto.

# SUPERFICIES MÍNIMAS EN AMBIENTES HOMOGÉNEOS

### 6.1. Ambientes homogéneos

En el estudio que hemos realizado hasta ahora, las superficies estaban situadas en el espacio euclídeo tridimensional usual. Es decir, nuestro espacio tiene tres dimensiones (alto, ancho y largo), y las magnitudes se miden del modo habitual.

Una propiedad fundamental del espacio  $\mathbb{R}^3$  es que es *isotrópico* y homogéneo. Básicamente, esto quiere decir que si escogemos un punto p y un vector v, y por otro lado un punto q y un vector w, entonces existe una transformación del espacio (una traslación y un giro adecuados) que lleva el punto p al punto q, y el vector v al vector w. En otras palabras: el espacio es idéntico en todos los puntos q en todas las direcciones.

Existen exactamente otros dos espacios modelo tridimensionales que cumplen estas dos propiedades: la esfera tridimensional  $\mathbb{S}^3$ , y el espacio hiperbólico tridimensional  $\mathbb{H}^3$ , en cuyas geometrías no entraremos. Estos tres espacios dan lugar a las llamadas geometría euclídea, esférica e hiperbólica.

Esta lista se hace más grande si no pedimos al espacio que sea isotrópico, sino simplemente que sea homogéneo. Esto es, si pedimos simplemente que, dados dos puntos del espacio, haya una transformación que conserve todas las magnitudes de dicho espacio, y que lleve un punto al otro (podemos pensar en dicha transformación como una traslación en el espacio).

Así, un espacio homogéneo es idéntico en todos sus puntos, pero no es cierto que sea idéntico en todas direcciones. En efecto, en dichos espa-

cios existen direcciones privilegiadas, que se comportan de modo distinto a las restantes. Esto no debe de extrañarnos demasiado. Si pensamos por un momento en nuestra realidad cotidiana, está claro que la dirección vertical es especial para nosotros: nos podemos mover a derecha e izquierda, girar en un plano horizontal sobre nosotros mismos, pero no podemos movernos del mismo modo hacia arriba o hacia abajo.

Un ejemplo muy sencillo de espacio homogéneo que no es isotrópico es el siguiente. Empecemos por pensar que el espacio usual  $\mathbb{R}^3$  se puede generar al tomar un plano  $\mathbb{R}^2$  y desplazarlo verticalmente para todas las alturas posibles. Entonces, si en vez de un plano tomamos una esfera bidimensional  $\mathbb{S}^2$  y la desplazamos en todas las alturas posibles, lo que obtenemos es un espacio tridimensional (las tres dimensiones son: latitud y longitud en la esfera, más la altura dada por el desplazamiento que realizamos) que es homogéneo, pero que no es isotrópico<sup>1</sup>. En efecto, la dirección dada por la altura tiene un carácter geométrico totalmente distinto a las direcciones correspondientes a latitud y longitud, las cuales entre sí son básicamente idénticas (sólo difieren en un giro de la esfera).

Pues bien, existe una lista de 8 espacios tridimensionales, que pueden ser considerados como los espacios canónicos de las matemáticas. Dichos espacios son homogéneos y cumplen además un par más de condiciones técnicas: son las llamadas geometrías tridimensionales de  $Thurston^2$ . Tres de ellas son los espacios euclídeo, hiperbólico y esférico. Otra de ellas es el espacio producto  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , esto es, el obtenido al trasladar una esfera bidimensional según explicamos anteriormente. En la siguiente sección presentaremos muy brevemente otra geometría de Thurston: el espacio de Heisenberg tridimensional Nil<sub>3</sub>.

 $<sup>^1</sup>$  De hecho, este espacio tridimensional ha de ser visto dentro del espacio de 4 dimensiones  $\mathbb{R}^4$ , pues necesitamos incluir una dimensión más para desplazar la esfera de modo que no se corte a sí misma en el desplazamiento.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Técnicamente, una geometría de Thurston es una 3-variedad riemanniana simplemente conexa, homogénea, con grupo de isometrías maximal y que admite cocientes compactos. Las geometrías de Thurston son los *ladrillos* que componen cualquier 3-variedad de acuerdo con la conjetura de geometrización de Thurston, recientemente probada por Perelman.

## 6.2. El espacio de Heisenberg

El espacio tridimensional de Heisenberg puede verse como el espacio  $\mathbb{R}^3$ , pero con un modo distinto de medir magnitudes. Así, tenemos tres dimensiones (ancho, largo y alto), y tres coordenadas canónicas x, y, z, junto con la manera de medir que explicaremos a continuación.

En el espacio euclídeo usual, la longitud de los vectores se mide del modo habitual: si v=(x,y,z) es un vector del espacio, entonces su módulo ||v|| viene dado por

$$||v||^2 = x^2 + y^2 + z^2. (6.1)$$

Pues bien, el espacio de Heisenberg tridimensional, denotado por Nil<sub>3</sub>, es  $\mathbb{R}^3$  pero donde las longitudes de vectores se calculan de acuerdo a la siguiente fórmula: si estamos en el punto (a,b,c) del espacio, y tomamos el vector v=(x,y,z) en dicho punto, entonces la longitud |v| del vector viene dada por

$$|v|^2 = x^2 + y^2 + (\tau(bx - ay) + z)^2.$$
(6.2)

Aquí,  $\tau > 0$  es una constante positiva asociada al espacio.

En este espacio, la dirección vertical z es especial con respecto a las direcciones x e y. Observemos también que este espacio es una perturbación del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$ : en efecto, si tomamos el valor del parámetro  $\tau$  como  $\tau=0$ , obtenemos que la fórmula (6.2) se convierte en (6.1).

Aunque la fórmula (6.2) parezca totalmente arbitraria, esto no es así en realidad: es justamente la que proporciona una de las 8 geometrías canónicas tridimensionales de las matemáticas, como dijimos anteriormente.

Conviene decir que hemos sido bastante poco formales en la introducción del espacio de Heisenberg. El marco natural para formalizar su introducción hubiese sido el de la geometría de Riemann y la teoría de grupos de Lie, lo cual hubiese requerido conocimientos mucho más avanzados.

# 6.3. Solución al problema de Bernstein

En esta penúltima sección se explica uno de los teoremas principales que hemos obtenido a lo largo de estos años sobre la teoría de superficies

mínimas: la resolución del problema de Bernstein dentro del espacio de Heisenberg tridimensional. Este resultado fue obtenido en colaboración con Isabel Fernández, de la Universidad de Sevilla.

Según acabamos de explicar en la sección anterior, el espacio de Heisenberg tridimensional es uno de los 8 espacios canónicos de las matemáticas. Puede verse como una deformación del espacio euclídeo usual  $\mathbb{R}^3$ , tal que la dirección vertical tiene una geometría privilegiada respecto al resto de direcciones, y tal que las magnitudes se miden de modo distinto.

En este espacio, podemos realizar un desarrollo teórico similar al explicado en esta conferencia para el espacio euclídeo sobre las superficies que minimizan el área. No obstante, como en el espacio de Heisenberg el área se mide de modo distinto al espacio euclídeo, la situación podría resultar a su vez muy distinta.

Por ejemplo, una primera diferencia es que la ecuación que ha de cumplir una superficie mínima en Nil<sub>3</sub> que sea gráfica es distinta a la ecuación de  $\mathbb{R}^3$ . En efecto, una gráfica z = u(x,y) es una superficie mínima en el espacio de Heisenberg si cumple la ecuación

$$(1+\beta^2)u_{xx} - 2\alpha\beta u_{xy} + (1+\alpha^2)u_{yy} = 0, (6.3)$$

donde  $\alpha := u_x + \tau y \ y \ \beta := u_y - \tau x$ .

Es importante observar que al hacer  $\tau=0$  en dicha ecuación obtenemos una expresión que ya nos apareció: la ecuación (3.1) de las gráficas mínimas de  $\mathbb{R}^3$ . Este hecho, junto con el famoso teorema clásico de Bernstein (explicado en el Capítulo 4) motiva el siguiente problema:

¿Cuáles son las gráficas enteras mínimas en el espacio de Heisenberg?

De manera equivalente, la pregunta sería cuáles son las soluciones de la ecuación (6.3) que están definidas para todos los valores de sus variables x e y. A las gráficas en estas condiciones se las llama soluciones al problema de Bernstein.

Dicho problema fue planteado por diversos investigadores de la teoría, y en particular por el prestigioso matemático Harold Rosenberg. Los primeros ejemplos de soluciones que aparecieron fueron los planos, los paraboloides hiperbólicos (de ecuación  $z=c\,xy$ , con c constante), y algunos otros ejemplos más sofisticados descubiertos por Benoît Daniel.

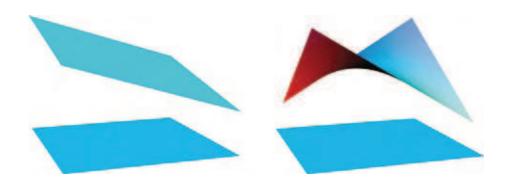


Figura 6.1: En el espacio de Heisenberg, además de los planos, hay otros ejemplos de soluciones al problema de Bernstein. Entre ellas, ciertos paraboloides hiperbólicos (derecha).

Esto sugería un espacio de soluciones demasiado vasto y complejo como para poderse describir de modo preciso.

No obstante, en 2007 fuimos capaces de dar la solución a dicho problema. El resultado obtenido es bastante técnico en su formulación, pero una versión simplificada sería la siguiente:

Teorema (Fernández-Mira). Dados un vector del plano y una función conforme definida en el disco unidad o en el plano, hay una única solución del problema de Bernstein en el espacio de Heisenberg asociada a ellos. Además, las obtenidas son todas las soluciones del problema.

Aquí hay que explicar lo que entendemos por una función *conforme* y por el *disco unidad*. Simplemente, conforme significa que conserva ángulos, y el disco unidad es el círculo de centro el origen y radio 1. Así, una función conforme es una función desde el disco unidad o el plano, con valores en el plano, y tal que el ángulo entre dos vectores cualesquiera no varía bajo la acción de la función<sup>3</sup>.

El teorema obtenido es radicalmente distinto a la situación descrita por el teorema de Bernstein clásico (a saber, que toda gráfica entera mínima en el espacio euclídeo ha de ser un plano). No obstante, el re-

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> De hecho, la función debe conservar también la orientación del plano. Así, la correspondencia hace referencia en realidad a funciones holomorfas definidas en el plano complejo o el disco unidad.

sultado que acabamos de presentar proporciona una solución óptima al problema. En efecto:

- (1) Por un lado, existen muchísimas funciones conformes, y por tanto también muchísimas soluciones al problema de Bernstein. Así pues, no se pueden dar fórmulas explícitas para todas ellas, y el resultado óptimo sería el de describir el espacio de soluciones al problema de Bernstein en términos de una clase de objetos matemáticos ya conocida.
- (2) Por otro lado, el espacio de funciones conformes, y el de vectores del plano, son dos clases de objetos matemáticos bien conocidos. Nuestro teorema nos dice que la clase de soluciones al problema de Bernstein en el espacio de Heisenberg es básicamente la misma clase que el producto de las dos anteriores. Así pues, estamos efectivamente dando una descripción precisa y exacta de todas las soluciones al problema de Bernstein, como se pretendía.

## 6.4. Posibles extensiones y aplicaciones

Vamos a concluir esta conferencia explicando un problema abierto de la teoría, esto es, un problema para el que aún no se sabe la solución.

Al igual que sucede en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$ , es fácil encontrar la siguiente propiedad: Todas las gráficas enteras mínimas del espacio de Heisenberg Nil<sub>3</sub> son propias y estables. Por otro lado, los planos verticales son a su vez ejemplos de superficies mínimas propias y estables en Nil<sub>3</sub>.

A la vista de estos hechos, un importante problema abierto de la teoría es el siguiente:

¿Toda superficie mínima propia y estable en el espacio de Heisenberg Nil<sub>3</sub> es una gráfica entera o un plano vertical?

Este resultado, en caso de ser cierto, generalizaría al espacio de Heisenberg el teorema de do Carmo, Peng, Fischer-Colbrie, Schoen y Pogorelov (a saber, que las únicas superficies mínimas propias y estables en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$  son los planos).

Diversos especialistas de primer nivel de la teoría esperan que el resultado anterior sea cierto. Esto es lo que se llama una *conjetura* en

matemáticas. La conjetura que aquí nos ocupa está siendo estudiada en detalle en la actualidad por varios equipos de investigación en teoría de superficies.

Finalmente, en lo que respecta a las posibles aplicaciones a otras ramas científicas de la resolución del problema de Bernstein en el espacio de Heisenberg, poco podemos decir ahora mismo. Como explicamos al inicio de la conferencia, la matemática abstracta no se desarrolla buscando aplicaciones concretas inmediatas. En nuestro caso, nuestra motivación era una mezcla de la curiosidad por entender una situación geométrica natural, el reto de resolver un problema complejo de la teoría, y la ilusión de crear un teorema bonito de acuerdo con los patrones estéticos matemáticos usuales.

Por otra parte, hemos visto que el estudio matemático de las superficies de área mínima en el espacio euclídeo ha sido aplicado para describir las formas de películas de jabón, membranas de separación entre fluidos o formación de cristales. Si en el futuro alguna de estas ramas necesita considerar superficies que deban tener área mínima, pero en ambientes que no sean euclídeos sino que sean sólo homogéneos (esto es, que sean iguales en todos sus puntos pero no necesariamente en todas las direcciones), una gran parte del desarrollo teórico de dicha idea ya estará hecho.



# BIBLIOGRAFÍA

La cantidad de bibliografía relevante sobre la teoría de superficies mínimas es enorme. Aquí daremos sólo unas pocas referencias bibliográficas básicas, junto con una explicación de su contenido.

## Libros y monografías

 Johannes C. Nitsche, Lectures on minimal surfaces. Cambridge University Press, 1989.

Un libro con carácter enciclopédico sobre la teoría. Tiene aportaciones muy importantes sobre la historia de las superficies mínimas, y trata con detalle bastantes de los trabajos de los geómetras del siglo XIX. El libro es muy técnico, pero está ilustrado con muchos dibujos de superficies mínimas, incluyendo esculturas con participación del autor.

• U. Dierkes, S. Hildebrand, A. Kuster y O. Wohlrab, *Minimal Surfaces I.* Springer-Verlag, 1991.

Otro libro técnico de investigación, similar en muchos aspectos a la monografía de Nitsche, aunque centrándose muchas veces en matices distintos.

• Robert Osserman, A survey of minimal surfaces. Dover, 1986.

Un clásico. La base de la teoría global de superficies mínimas explicada (para matemáticos) de manera clara y breve por uno de sus creadores.

• John Oprea, Differential geometry and its applications. Pearson, 2003.

Un libro de texto sobre teoría de superficies para estudiantes de matemáticas. Tiene un enfoque muy práctico e intuitivo sobre la teoría de superficies mínimas.

Luis A. Cordero, Marisa Fernández, Alfred Gray, Geometría diferencial de curvas y superficies con Mathematica. Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.

Un libro enorme sobre geometría de curvas y superficies para estudiantes de matemáticas. Una de sus mayores virtudes es su compendio de gráficas de superficies. En particular, explica cómo construir superficies mínimas mediante fórmulas desde distintas perspectivas. Muy útil para quien quiera dibujar su propia superficie mínima.

 Robert Osserman, La poesía del universo. Drakontos, Ed. Crítica, 1997.

Libro de divulgación que explica la noción de curvatura y su importancia. Si bien no trata directamente sobre superficies mínimas, su modo de explicar los conceptos resultará útil para quien quiera aprender más sobre el tema.

 Luis J. Alías, El significado geométrico de la curvatura. Fundación Séneca, 2004.

Conferencia escrita por el primer galardonado con el Premio Jóvenes Investigadores de la Región de Murcia. Accesible para un público muy general, trata con más detalle que aquí la noción de curvatura de una curva, y de curvatura media de una superficie.

S. Hyde, Z. Blum, T. Landh, S. Lidin, B.W. Ninham, S. Andersson, K. Larsson, The language of shape: The Role of Curvature in Condensed Matter: Physics, Chemistry and Biology. Elsevier, 1997.

Libro sobre el papel de la noción de curvatura en diversas ramas de la química y la biología. El papel de las superficies mínimas en dichas ramas se explica allí en gran detalle desde un punto de vista no matemático.

Serge Lang, El placer estético de las matemáticas. Alianza Editorial, 1994.

Este es otro libro de divulgación matemática. Narra tres conferencias del eminente profesor Serge Lang para un *público de sábado por la tarde*. La tercera de ellas habla de geometría, espacios generales tridimensionales y el trabajo de Thurston. Una lectura muy amena, que también trata de explicar qué hacen los matemáticos y por qué lo hacen.

#### Artículos

• A. Ros, Mi primer problema de Plateau, Gaceta de la RSME, **2** (1999), 474–477.

Artículo de divulgación en español del eminente geómetra murciano Antonio Ros, sobre el problema de Plateau. Da una demostración muy sencilla de que toda superficie mínima es, efectivamente, un mínimo local para el área.

• C.J. Costa, La geometría de las películas de jabón: superficies mínimas, *Gaceta de la RSME*, **2** (1999), 215–235.

Artículo de divulgación del geómetra Celso J. Costa sobre la teoría de superficies mínimas. En particular, narra el descubrimiento de su famosa superficie: la *superficie de Costa*, que aparece en la portada de esta conferencia. El artículo de Costa fue sumamente inspirador para mí durante mis primeros meses como estudiante de doctorado.

- W.H. Meeks, H. Rosenberg, The uniqueness of the helicoid, *Annals of Mathematics* **161** (2005), 723–754.
- W.H. Meeks, J. Pérez, A. Ros, Properly embedded minimal planar domains, prepublicación.

Estos trabajos contienen dos de los teoremas más importantes de los últimos años en la teoría de superficies mínimas. Estos teoremas proporcionan la clasificación de las superficies mínimas propias con la topología de un dominio plano: las únicas son el plano, el catenoide, el helicoide y los ejemplos de Riemann.

• W.H. Meeks, J. Pérez, The classical theory of minimal surfaces. Aparecerá en *Bulletin of the American Mathematical Society*.

Una recopilación general sobre avances recientes en la teoría global de superficies mínimas, escrito por dos de los investigadores más destacados de dicha rama.

 Isabel Fernández, Pablo Mira, Holomorphic quadratic differentials and the Bernstein problem in Heisenberg space, Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009), 5737–5752.

En este trabajo resolvemos el problema de Bernstein en el espacio de Heisenberg, según se indica en el último capítulo de esta conferencia.

#### Referencias en internet

• http://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/importance.pdf

Conferencia del medallista Fields británico Tim Gowers titulada *The importance of mathematics*. Muy amena y didáctica. El video de la conferencia también está disponible en YouTube.

• www.uam.es/personal-pdi/ciencias/jvazquez/reptmath.ps

Conferencia de Juan Luis Vázquez (el único español hasta la fecha que ha sido Conferenciante Plenario en un ICM), titulada *The importance of mathematics in the development of science and industry* sobre la importancia de las matemáticas, y la distinción entre matemática pura y aplicada.

• www.indiana.edu/~minimal/toc.html

La página web de Matthias Weber, un investigador importante de la teoría de superficies mínimas. En ella hay una cantidad impresionante de gráficos de superficies mínimas, a menudo con los programas que las generan por ordenador. Una gran parte de las ilustraciones de esta conferencia están sacadas de dicha página (con permiso de su autor).

• www.bugman123.com

La página web de Paul Nylander contiene diversos diseños artísticos basados en superficies mínimas. Algunas de las figuras del texto están reproducidas de dicha página, con el permiso del autor.

www.math.unifi.it/~paolini/

El profesor Paolini es un matemático especialista en el Cálculo de Variaciones. En su página web hay diversos dibujos y explicaciones en conexión con el problema de encontrar una superficie mínima con un borde dado. Varias figuras del texto han sido extraídas de esta página, con el permiso del autor.



#### **AGRADECIMIENTOS**

En primer lugar me gustaría agradecer, en nombre de los investigadores murcianos jóvenes y ya no tan jóvenes, a la Fundación Séneca por crear y mantener este Premio Jóvenes Investigadores Región de Murcia. Hace 6 años, yo estaba sentado entre el público viendo cómo uno de mis directores, Luis José Alías, lo recibía en su primera edición. Desde entonces no ha llovido poco, y la consolidación de este premio constituye una gran noticia para la ciencia de nuestra región.

Por otro lado, también me gustaría felicitar al finalista de esta edición, José Berná, por su brillante trayectoria, y desearle toda clase de éxitos en su carrera profesional.

Quiero dar las gracias a los compañeros e instituciones que me animaron y apoyaron en la presentación de la candidatura. En especial, me gustaría agradecer el apoyo de la Real Sociedad Matemática Española y su presidente Antonio Campillo, así como de mi Departamento de Matemática Aplicada y Estadística de la Universidad Politécnica de Cartagena y su entonces director Sergio Amat. Otro agradecimiento muy especial que me gustaría hacer es a los investigadores que escribieron cartas de apoyo para la candidatura: William H. Meeks, Harold Rosenberg, Manuel de León y Antonio Ros. El entusiasmo con el que escribieron dichas cartas ya es un premio en sí.

También quiero dar las gracias a mis compañeros y amigos de mi departamento, por hacer fácil cada día una labor tan exigente como la investigación matemática. Para mí, sois los mejores compañeros del mundo. Extiendo este agradecimiento a los compañeros de los que considero mis otros dos departamentos: el de Matemáticas de la Universidad de Murcia, y el de Geometría y Topología de la Universidad de Granada.

Hace poco, una periodista se sorprendió en una entrevista con motivo del premio de que hablase en un cierto momento de suerte. ¿Pero cómo? ¿Un científico que cree en la suerte? me dijo. Pues sí, creo en la suerte porque la he tenido durante toda mi vida.

Tuve suerte de que Luis Alías me contagiase su pasión por la investigación, accediera a dirigir mi tesis doctoral, y en el momento adecuado me animase a poner rumbo a Granada para aprender lo que se hacía allí. Es probable que sin él nunca me hubiese dedicado a la investigación matemática.

Tuve suerte de conocer allí a José Antonio Gálvez, mi otro director. Es difícil explicar en un par de frases todo lo que he aprendido de José Antonio en estos años, a muchos niveles. Sólo podría resumirlo diciendo que hay veces que un pequeño encuentro te cambia la vida, y conocer y trabajar con José Antonio, uno de los mejores matemáticos que yo haya visto, así como uno de mis mejores amigos, sin duda cambió la mía.

He tenido mucha suerte de investigar entre amigos, dentro de nuestro propio grupo de jóvenes investigadores. Son muchas las tardes que hemos empezado escribiendo fórmulas en un papel para terminarlas discutiendo los problemas con una cerveza y una tapa en la mano. Quiero dar las gracias a todos mis compañeros del grupo de investigación y alrededores, y en particular a Juan Ángel Aledo, José María Espinar y Asun Jiménez. Gracias, especialmente, a Isa Fernández, mi compañera de tándem, por estos años de complicidad y de trabajar juntos con una sonrisa en la boca.

He tenido muchísima suerte de tener una familia que siempre me ha apoyado y se ha alegrado conmigo en cada pequeño éxito. Una de las cosas más bonitas de recibir un premio es ver a toda la gente que se siente partícipe de él, y que te hacen disfrutarlo mucho más de lo que hubieses imaginado. Muchas gracias a mis padres José Manuel y Loli por tenerme paciencia todos estos años, y a mis suegros Emilio y Carmen, por todas esas manos que han echado cuando me he ido de congreso.

Finalmente, he tenido la mayor suerte del mundo de pasar todo este tiempo con Begoña, la coautora de mis dos mejores trabajos: Lucía y Quique. Ella escribió una vez que compartir la vida con un matemático es como ser ciega y estar casada con un pintor. Gracias por animarme desde esa oscuridad a trabajar y hacer las cosas bien, por hacerme vivir con más intensidad los éxitos y diluir los fracasos, y por evitar que me obsesione más de la cuenta con mis rollos matemáticos.

Sé que me dejo muchos nombres en el tintero, pero no es plan de ser más pesado de la cuenta. Dejadme simplemente decir para terminar...

¡Muchas gracias a todos!









