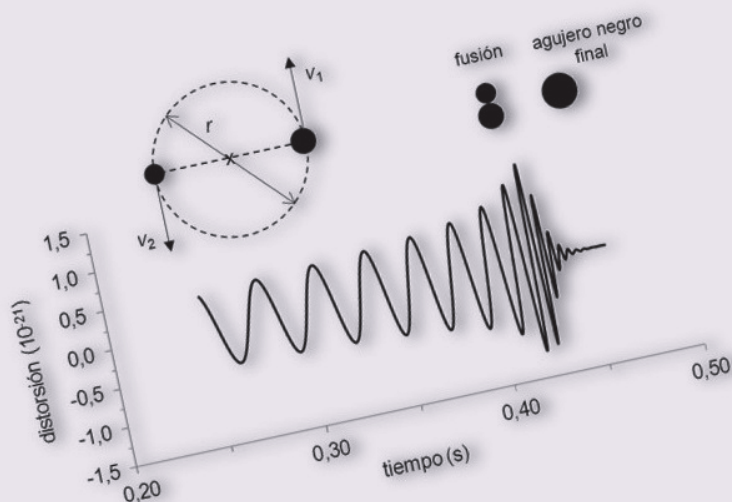
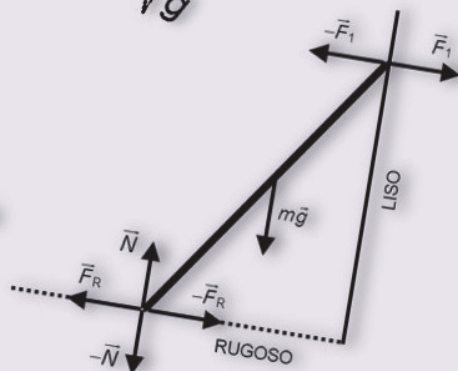


FÍSICA DE COMPETICIÓN

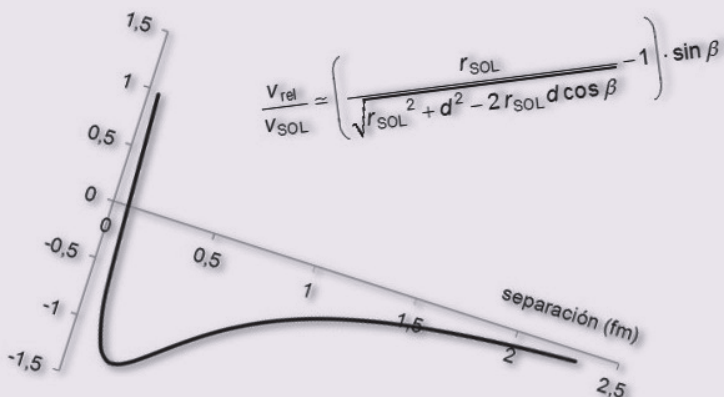
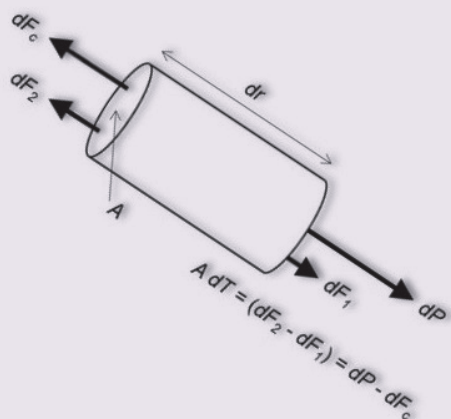
*Problemas avanzados para
bachillerato, olimpiadas y concursos*



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$



$$\omega^2 = \frac{g \tan \alpha}{R_p + L \sin \alpha}$$



Antonio Guirao Piñera
Luis Roca Zamora

Física de competición

Problemas avanzados para bachillerato, olimpiadas y concursos

Antonio Guirao Piñera

(Profesor de Física en la Universidad de Murcia)

Luis Roca Zamora

(Profesor de Física en la Universidad de Murcia)

Libro editado como acción del Programa
de Cultura Científica e Innovadora del Plan de
Actuación de la Fundación Séneca para 2022

f SéNeCa⁽⁺⁾

Agencia de Ciencia y Tecnología
Región de Murcia



© los autores, 2022



Attribution-NonCommercial-NoDerivatives
4.0 International (CC BY-NC-ND 4.0)

ISBN: 978-84-125914-0-8

Depósito Legal: MU 202-2022

Índice general

Prólogo de los autores	1
Prólogo	3
Índice de problemas	5
Índice temático	7
Índice histórico en la Olimpiada de Física de Murcia	9
Problemas resueltos	11 – 210

Prólogo de los autores

Este libro recoge una selección de **71 problemas resueltos** que los autores hemos planteado en la fase regional de Murcia de la Olimpiada Española de Física desde el año 2005 hasta 2021.

La **Olimpiada de Física** es la competición más importante de física preuniversitaria. Su alcance se extiende desde las fases locales hasta las supranacionales, que involucran a miles de estudiantes en nuestro país cada año y a varios cientos de miles en todo el mundo. Aparte de su carácter competitivo, la Olimpiada es una actividad que tiende un puente entre la enseñanza secundaria y la universidad, contribuye al fomento de las vocaciones científicas, y promueve valores sociales y culturales.

Con esta publicación queremos atender a la petición de muchos profesores y estudiantes de bachillerato de disponer de una recopilación de los problemas de la Olimpiada de Murcia con sus soluciones, para la **preparación** de la misma. Pero el objetivo va más allá de la fase regional. Dadas las características de los problemas, el libro puede utilizarse también para preparar la fase nacional, la *International Physics Olympiad*, la Olimpiada Iberoamericana de Física, así como otras competiciones como la *European Physics Olympiad* o la *European Union Science Olympiad*.

Por otro lado, el libro contiene materiales que pueden servir de base para el **desarrollo de proyectos** por estudiantes de los Bachilleratos de Investigación, de Excelencia, Científico, etc., del Bachillerato Internacional, y de otras modalidades de formación orientadas a la iniciación a la investigación. Igualmente puede ser de utilidad como inspiración o punto de partida para concursantes del Certamen de Jóvenes Investigadores y de otros concursos.

Los problemas propuestos están pensados para **estudiantes preuniversitarios**. La resolución puede hacerse con los conocimientos del currículum oficial de enseñanza secundaria y bachillerato, o con las ayudas necesarias que se facilitan cuando alguna pregunta incluye nociones de nivel superior. Sin embargo, se trata de **problemas avanzados** que exigen pensar y enfrentarse a nuevas situaciones, más allá del formulismo y de los conocimientos automatizados. Precisamente, uno de los retos del diseño y la elaboración de los problemas ha sido adaptar temas a veces muy complejos o de tipo interdisciplinario para que puedan abordarse con las herramientas de física y matemáticas al alcance de estos estudiantes. Los apartados de cada problema tienen una gradación de dificultad; algunos de ellos son directos, mientras que otros requieren mucha dedicación.

Se ha intentado contextualizar los problemas de forma que resulten atractivos. Una de sus características es que, en general, no son de estilo académico. Plantean un **amplio abanico de situaciones** donde aparece la aplicabilidad de la física y su utilidad para entender la naturaleza y el mundo actual que nos rodea. Algunos de los temas que se tratan son, por ejemplo:

- Temas de actualidad e interés social (“El terremoto de Lorca”, “Calentamiento global”, etc.) y temas de actualidad en el mundo de la física (“Ondas gravitacionales”, “Cazando exoplanetas”, etc.).

- Aplicaciones de la física (“Aplicaciones de los acelerómetros”, “Veleros espaciales”, etc.) y otros ámbitos científicos (“Crecidas del Amazonas”, “Mareas lunares”, etc.).
- El mundo de la cultura (“Física en *Star Wars*”, “Calentándonos en el Guggenheim”, etc.) y del deporte (“Saques y pases en fútbol”, “Tiro con arco”, etc.).
- Situaciones cotidianas (“Horno microondas”, “Consumo homologado de combustible”, etc.) y situaciones históricas (“Una hipótesis sobre la formación de la Luna”, “A vueltas con el átomo de Rutherford”, etc.).
- Anécdotas o curiosidades (“Escándalo animal”, “Caída libre”, etc.) y física recreativa (“Sillas voladoras”, “La cuna de Newton”, etc.).
- Misiones espaciales (“Saturno y la misión Cassini-Huygens”, “De la Tierra a la Luna”, etc.).
- Aspectos del cuerpo humano (“Grasa y Arquímedes”, “Fiebre y sudor”, etc.).
- Cuestiones de tipo experimental (“Yo mido la gravedad con un chorro de agua”, “Una guitarra y sus trastes”, etc.).

Para ayudar al lector a buscar un problema determinado o un tema en particular, además del índice de problemas ordenados numéricamente, se ha incluido **un índice temático** donde pueden seleccionarse los problemas por palabras clave de acuerdo a los contenidos de los temarios oficiales que trata.

Además de la destreza en el manejo de los principios, las leyes y las ecuaciones de la física, y del cálculo matemático, los problemas planteados implican el ejercicio de otras **competencias básicas para la ciencia**, como: capacidad de análisis y síntesis, habilidad para seleccionar e interpretar información relevante, uso de analogías, razonamiento y formulación de hipótesis, integración de conocimientos, etc. La resolución exitosa de los problemas pasa por una lectura cuidadosa del enunciado, la adquisición de una visión global de la situación, y la identificación de la rama de la física que corresponde a cada apartado.

Uno de los hándicaps que tienen los estudiantes preuniversitarios es la escasez de **preparación experimental**. Aunque este libro no es un manual de laboratorio, algunos problemas presentan situaciones y supuestos prácticos que sirven de acercamiento a las pruebas y proyectos experimentales, ya que, a partir de medidas experimentales facilitadas en los enunciados, hay que realizar tareas de interpretación de gráficas, análisis de datos y representación gráfica.

En muchos de los problemas hemos incluido una sección final de “**saber más**” con información adicional sobre el tema o con sugerencias para profundizar.

Esperamos que el lector encuentre aquí material útil para la preparación de olimpiadas y concursos, y recursos de inspiración para proyectos de iniciación a la investigación. Pero también esperamos que éste sea un libro de carácter divulgativo que permita acercarse al mundo de la física y disfrutar con ella.

Los autores

Prólogo

Durante los últimos veinte años, la Fundación Séneca ha estado apoyando la organización de Olimpiadas Científicas en la Región de Murcia como parte de su Programa Regional de Cultura Científica e Innovadora. Una veintena de estas Olimpiadas- que comprenden desde las Lenguas Clásicas, el Derecho o la Empresa hasta las Ingenierías y la Arquitectura, pasando por las Matemáticas, la Física, la Química, la Biología o la Geología- se están desarrollando con este impulso, habiéndose consolidado como una herramienta de promoción del talento preuniversitario que cada año convoca a miles de alumnos de enseñanza secundaria y constituyéndose en una parte importante de la “marca científica” de la Región de Murcia. El objetivo es acercar a los alumnos a estas disciplinas, estimular su interés -en realidad, sus intereses- y su curiosidad, reconocer su talento y su esfuerzo y apoyar el trabajo de los centros, profesores y familias que los animan.

Universidades, organismos de investigación, academias científicas, centros de innovación, colegios profesionales, asociaciones, sociedades científicas y otras entidades colaboran con los centros de educación secundaria para hacer realidad una experiencia que pone en juego no solo el conocimiento científico de los alumnos, sino también sus habilidades deductivas, su pensamiento creativo, su capacidad para el trabajo en equipo y su voluntad de implicarse al máximo en los desafíos que las Olimpiadas plantean.

Todo conocimiento es la respuesta a una cuestión, afirmó Bachelard, de modo que las preguntas que nos formulamos, o que se nos formulan, determinan nuestras posibilidades de conocer. Con *Física de Competición*. Antonio Guirao y Luís Roca han conseguido ampliar el arsenal de herramientas disponibles para el profesorado, mostrando de forma práctica una estrategia de aprendizaje que ayuda a reducir la distancia entre el conocimiento teórico y el saber común. Pero, además, han logrado poner a disposición de los alumnos unos materiales capaces de guiar su curiosidad, estimular su interés y hacerles explorar los límites de un territorio nunca cartografiado del todo.

Un problema es una situación que plantea dificultades para las que no se poseen soluciones hechas. Los setenta y un problemas, seleccionados con una cuidadosa atención por los autores, corresponden a los propuestos en la fase regional de la Olimpiada de Física de los años 2005-2021. En todas las ocasiones -incluida la celebración en Murcia de dos Olimpiadas Nacionales- la Fundación Séneca ha podido acompañar y apoyar el esfuerzo de organización, que se completa ahora con esta pequeña aventura editorial.

Los problemas han sido planteados para retar a los alumnos, no solo con vistas a la preparación de las Olimpiadas de Física, sino, sobre todo, con el fin de enfrentarles a situaciones nuevas que estimulen el pensamiento en función de su capacidad en cada momento. Se intenta algo más que adiestrar en la resolución de problemas avanzados. Como declaran los autores, las situaciones planteadas revelan la aplicabilidad de la física y su utilidad para entender la naturaleza y el mundo actual que nos rodea.

Unas veces se trata de contextos cotidianos, otras de situaciones infrecuentes y en todos los casos de situaciones que obligan a poner en marcha los procesos cognitivos y adaptar las estrategias más adecuadas, porque las estrategias de solución aquí no son nunca obvias, o, al menos, no lo son de forma inmediata. Los problemas son un desafío exigente. Obligan a ser curiosos, a observar, a comprender profundamente y a pensar de forma creativa. No se resuelven con una fórmula aplicada mecánicamente, exigen implicación: ser flexibles, probar soluciones y asumir riesgos, incluido, desde luego, el de fallar. A cambio, todos enseñan a perseverar, y por eso enriquecen de forma extraordinaria la experiencia del aprendizaje y fortalecen la confianza en la propia capacidad de resolverlos.

El trabajo de Antonio Guirao y Luís Roca compone una colección inspiradora. Trae a la mente las palabras del físico Thomas Fink, "A veces pienso que el mundo de las matemáticas y la física es más hermoso, más fascinante y más emocionante que la vida ordinaria, y me dan ganas de invitar a la gente a que se una a mi aventura".

Los lectores de esta obra, encontrarán en sus páginas, si lo desean, las soluciones a los problemas; pero, irremediablemente, estos problemas plantearán desafíos nuevos, y esta vez la aventura será un viaje sin mapa, sin tiempo y sin destino conocido.

Fundación Séneca-Agencia de Ciencia y Tecnología de la Región de Murcia

Índice de problemas

1. Saturno y la misión Cassini-Huygens	11
2. Crecidas del Amazonas	14
3. Saques y pases en fútbol	16
4. Consumo homologado de combustible	20
5. Misión THEMIS	23
6. Boya osciladora	26
7. Una guitarra y sus trastes que se ha ido al traste	28
8. Sobre la velocidad de escape	31
9. Calentamiento global	32
10. La mezcla, térmica, perfecta	34
11. La cuna de Newton	35
12. Un péndulo en mi ascensor	37
13. El Endeavour regresa con éxito	38
14. Fuerzas dentro del núcleo atómico	40
15. Piscina térmica	42
16. El ciclotrón	43
17. Yo mido la gravedad con un chorro de agua	46
18. Tiro de tres	48
19. El equivalente mecánico del calor	51
20. Mareas lunares	53
21. Aplicaciones de los acelerómetros	59
22. Calentándonos en el Guggenheim	63
23. El corcho del pescador	64
24. Entrenamiento ciclista	66
25. Péndulo deslizante	67
26. Veleros espaciales	70
27. Un montón de arena	73
28. Sillas voladoras	74
29. Caída libre	79
30. La escalera	81
31. Estabilidad y apilamiento de bloques	83
32. Oxford vs. Cambridge	87
33. Energía por el sistema solar	90
34. Cazando exoplanetas	91

35. Vámonos de <i>puenting</i>	98
36. Curiosidad por el Curiosity	103
37. ¿Muelle o péndulo?	105
38. Contra escalera	107
39. Motocross parabólico	108
40. El paracaidista	109
41. Horno microondas	110
42. Grasa y Arquímedes	115
43. Cargas eléctricas	116
44. Fiebre y sudor	119
45. Un año marciano	120
46. Escándalo animal	121
47. Caída desde el mástil	123
48. Física en <i>Star Wars</i>	125
49. El terremoto de Lorca	131
50. Cosas de ondas	133
51. Ascensor espacial	135
52. A vueltas con el átomo de Rutherford	146
53. Una hipótesis sobre la formación de la Luna	149
54. Ondas gravitacionales	151
55. Para entrar en calor	159
56. Dúo ondulatorio	160
57. Trío electromagnético	161
58. Tiro con arco	162
59. El canto de un pajarico	170
60. Oscilaciones de una carga eléctrica	171
61. Vaya caídas	174
62. La Estación Espacial Internacional	176
63. La luz de las estrellas	178
64. Popurrí	183
65. Navegación a bordo de mi vuelo	184
66. La fuerza de un chorro de agua	189
67. El anillo cargado	191
68. Nuestra voz modificada	192
69. De la Tierra a la Luna: misión Apolo 11, 1969	193
70. Pendulaciones	200
71. El asteroide interestelar Oumuamua	205

Índice temático

Temática	Problemas (según su numeración)
MÉTODO CIENTÍFICO, MAGNITUDES Y UNIDADES	
Análisis y tratamiento de datos, representación	1, 3, 7, 14, 17, 19, 28, 35, 51, 58, 65, 69
Interpretación de gráficas y medida	2, 4, 9, 20, 28, 32, 34, 35, 41, 47, 48, 49, 51, 54, 58, 62, 63, 65, 71
Unidades	4, 9, 14, 19, 34, 47, 48, 54, 65, 71
Magnitudes vectoriales	20, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 41, 43, 58
Errores	1, 3, 7, 9, 17, 19, 28, 47, 54, 58, 63, 71
Formulación de hipótesis	7, 11, 19, 20, 21, 34, 41, 50, 51, 60, 62, 63, 65, 69, 71
CINEMÁTICA	
Aceleración, velocidad y distancia	4, 16, 24, 32, 35, 38, 47, 48, 49, 52, 58, 65, 69, 71
Caída libre, movimiento parabólico	3, 17, 18, 28, 29, 39, 58, 61, 70
Movimiento circular	16, 28, 41, 52, 54, 57, 63, 69, 70
DINÁMICA	
Leyes de Newton, balance de fuerzas	6, 12, 20, 21, 25, 27, 28, 29, 30, 32, 35, 40, 42, 43, 51, 58, 66, 67, 70, 71
Estática, equilibrio	27, 30, 31, 32, 67
Fuerzas elásticas	21, 35, 58
Rozamiento	27, 29, 30, 32, 58
Fuerzas centrales, fuerza centrípeta	14, 28, 51, 52
Conservación del momento lineal	11, 26, 48, 66
Centro de masas, colisiones	11, 25, 31, 34, 48
Momento de inercia y momento de una fuerza	30, 41
ENERGÍA Y TRABAJO	
Energía cinética y energía potencial	13, 16, 19, 20, 35, 48, 51, 52, 53, 54, 55, 57, 58, 61, 64, 69
Trabajo, potencia mecánica	20, 26, 29, 32, 51, 52, 54, 58
Conservación de la energía	11, 13, 18, 35, 51, 53, 61, 69, 70, 71
CALOR Y TEMPERATURA	
Calor y temperatura	10, 15, 19, 22, 29, 44, 53, 55, 70

HIDROSTÁTICA	
Presión y caudal	2, 17, 66
Principio de Arquímedes	6, 42, 64
OSCILACIONES	
Movimiento armónico simple	2, 6, 9, 20, 23, 58, 60
Período de oscilación	6, 23, 37, 43, 51, 60, 70, 71
Muelles y péndulos	12, 25, 37, 50, 64, 70
ONDAS	
Propiedades del movimiento ondulatorio	21, 32, 50, 54, 64, 68
Ondas estacionarias	7, 21, 41, 50, 51, 56, 68
Sonido	46, 50, 58, 59, 64, 68
Efecto Doppler	1, 50, 63
INTERACCIÓN GRAVITATORIA	
Movimiento orbital	1, 5, 13, 34, 36, 45, 51, 62, 64
Campo gravitatorio y fuerza gravitatoria	13, 20, 21, 29, 36, 48, 51, 69
Energía gravitatoria	13, 26, 45, 48, 51, 69, 71
Velocidad de escape	8, 48, 53, 54, 69
ELECTROMAGNETISMO	
Campo eléctrico y fuerza electrostática	14, 16, 41, 43, 52, 57, 60, 67, 70
Energía y trabajo eléctricos	43, 52, 60
Fuerza de Lorentz, movimiento de cargas en campos	16, 48, 57, 60, 64
Campo magnético por corrientes	52, 57, 60
Electricidad: corriente, ley de Ohm, potencia eléctrica	21, 41, 52, 60, 64
MATERIA, MASA, DIMENSIONES	
Masa, volumen, densidad	2, 6, 10, 14, 15, 17, 20, 33, 34, 42, 51, 71
Estructura atómica, ecuación de Einstein	14, 54, 63
RADIACIÓN, ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS	
Intensidad y potencia de las ondas electromagnéticas	26, 33, 34, 41, 44, 48, 54, 56, 71
Energía y momento del fotón	26, 41, 48, 63

Índice histórico en la Olimpiada de Física de Murcia

Año 2005

1. Saturno y la misión Cassini-Huygens 11

Año 2006

2. Crecidas del Amazonas 14
3. Saques y pases en fútbol 16

Año 2007

4. Consumo homologado de combustible 20
5. Misión THEMIS (apdo. a) 23

Año 2008

6. Boya osciladora (apdo. b) 26
7. Una guitarra y sus trastes que se ha ido al traste 28
8. Sobre la velocidad de escape (apdos. a–c) 31

Año 2009

9. Calentamiento global 32
10. La mezcla, térmica, perfecta (apdo. a) 34
11. La cuna de Newton (apdo. a) 35

Año 2010

13. El Endeavour regresa con éxito 38
14. Fuerzas dentro del núcleo atómico (apdo. a) 40
15. Piscina térmica (apdo. a) 42
16. El ciclotrón 43
17. Yo mido la gravedad con un chorro de agua 46

Año 2011

18. Tiro de tres 48
19. El equivalente mecánico del calor 51
20. Mareas lunares 53
21. Aplicaciones de los acelerómetros 59

Año 2012

22. Calentándonos en el Guggenheim 63
23. El corcho del pescador 64
24. Entrenamiento ciclista 66
25. Péndulo deslizante (apdos. a–b) 67
26. Veleros espaciales 70
27. Un montón de arena 73
28. Sillas voladoras 74

Año 2013

29. Caída libre 79
3. Saques y pases en fútbol (apdo. b) 16
30. La escalera (apdo. a) 81
31. Estabilidad y apilamiento de bloques 83
32. Oxford vs. Cambridge (apdos. a–c) 87
33. Energía por el sistema solar (reserva) 90
34. Cazando exoplanetas 91
35. Vámonos de *punting* 98

Año 2014

36. Curiosidad por el Curiosity	103
37. ¿Muelle o péndulo?	105
38. Contra escalera	107
39. Motocross parabólico	108
40. El paracaidista	109
41. Horno microondas	110

Año 2015

42. Grasa y Arquímedes	115
43. Cargas eléctricas	116
44. Fiebre y sudor (apdo. a)	119
45. Un año marciano	120
46. Escándalo animal (apdo. a)	121
47. Caída desde el mástil	123
48. Física en <i>Star Wars</i>	125

Año 2016

49. El terremoto de Lorca (apdos. a–b)	131
50. Cosas de ondas (apdos. a–d)	133
51. Ascensor espacial	135

Año 2017

52. A vueltas con el átomo de Rutherford	146
53. Una hipótesis sobre la formación de la Luna	149
54. Ondas gravitacionales	151

Año 2018

55. Para entrar en calor	159
56. Dúo ondulatorio	160
57. Trío electromagnético	161
58. Tiro con arco	162

Año 2019

59. El canto de un pajarico (apdo. b)	170
60. Oscilaciones de una carga eléctrica	171
61. Vaya caídas	174
62. La Estación Espacial Internacional	176
63. La luz de las estrellas	178

Año 2020

64. Popurrí	183
65. Navegación a bordo de mi vuelo	184
66. La fuerza de un chorro de agua	189
67. El anillo cargado	191
68. Nuestra voz modificada	192
69. De la Tierra a la Luna: misión Apolo 11, 1969 (apdos. a–f)	193

Año 2021

70. Pendulaciones	200
71. El asteroide interestelar Oumuamua	205

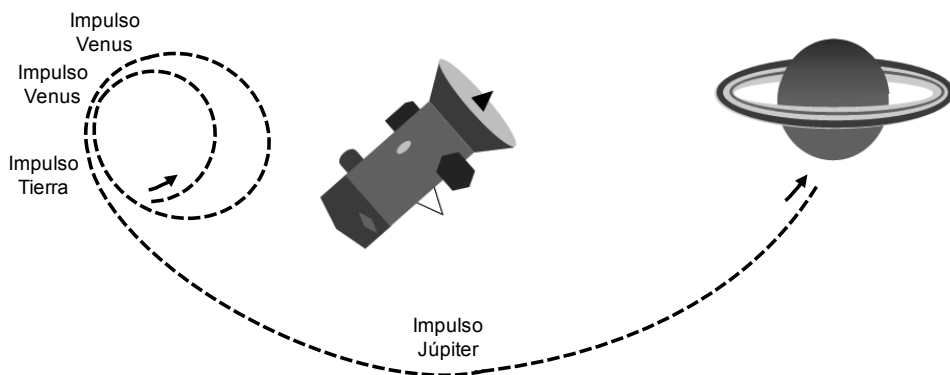
1. Saturno y la misión Cassini-Huygens

El planeta Saturno (el “señor de los anillos” del Sistema Solar) despierta gran interés científico por sus anillos, su gran cantidad de satélites naturales, su atmósfera... Tiene una masa de $5684,6 \times 10^{23}$ kg y está a más de 1400 millones de km del Sol.

a) Calcula el valor de la constante G de gravitación universal a partir de los valores indicados en la tabla para el radio medio (R) y el período (T) de la órbita de algunas lunas de Saturno.

	R (miles de km)	T (días)
Titán	1221,85	15,95
Hiperión	1481,10	21,28
Rea	527,04	4,52
Calipso	294,66	1,89

b) La nave espacial Cassini-Huygens, de unos 6000 kg de masa, fue lanzada en octubre de 1997 en una misión para estudiar el entorno de Saturno, y llegó a su destino tras un viaje de 6,7 años en el que siguió una trayectoria complicada aprovechando impulsos gravitatorios de varios planetas (Venus, por dos veces, la Tierra y Júpiter). Estos impulsos, llamados *asistencias gravitatorias* (y en inglés, *slingshot effect* o *swing-by*), sirven para incrementar la velocidad y cambiar la dirección de la nave cuando ésta pasa cerca de un planeta aprovechando la atracción gravitatoria*. En agosto de 1999 la nave Cassini aumentó su velocidad en 5,5 km/s mediante asistencia gravitacional al pasar cerca de la Tierra, la cual, en consecuencia, se frenó en una cantidad pequeñísima. Estima el orden de magnitud del cambio, ΔR , que experimentó el radio de la órbita de nuestro planeta debido a dicha asistencia gravitacional. La masa de la Tierra es aproximadamente 6×10^{24} kg y su distancia al Sol es $1,5 \times 10^{11}$ m.



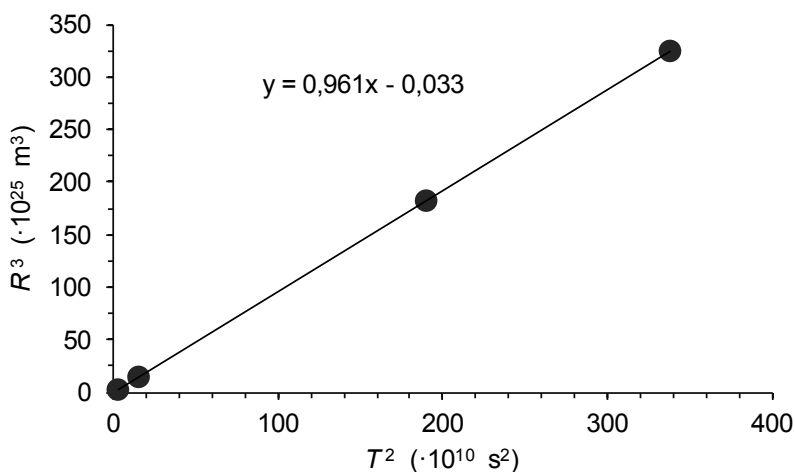
c) Uno de los objetivos de la misión Cassini-Huygens fue medir la magnitud y dirección de los vientos de Titán (la luna más grande de Saturno) mediante la sonda Huygens, que se separó de la nave Cassini y alunizó en Titán en enero de 2005. En el descenso a través de su atmósfera, el movimiento de la sonda causado por el viento cambia la frecuencia recibida debido al efecto Doppler. En la misión se pretendía medir la magnitud del viento con una precisión de 1 m/s. Determina si se pudo satisfacer esa precisión sabiendo que la sonda enviaba ondas de radio de 2040 MHz con un error máximo de 0,4 Hz.

Resolución

a) Primero transformamos las variables en la 3ª ley de Kepler para obtener una relación lineal $y = mx$, donde $y = R^3$, $x = T^2$ y la pendiente es $m = GM / 4\pi^2$:

	R (miles de km)	T (días)	$y = R^3$ (m^3)	$x = T^2$ (s^2)
Titán	1221,85	15,95	$1,824 \cdot 10^{27}$	$1,899 \cdot 10^{12}$
Hiperión	1481,10	21,28	$3,249 \cdot 10^{27}$	$3,380 \cdot 10^{12}$
Rea	527,04	4,52	$1,464 \cdot 10^{26}$	$1,525 \cdot 10^{11}$
Calipso	294,66	1,89	$2,558 \cdot 10^{25}$	$2,666 \cdot 10^{10}$

Realizamos un ajuste por mínimos cuadrados. La recta resultante tiene una pendiente igual a $0,961 \times 10^{15} \text{ m}^3/\text{s}^2$.



Despejando de la pendiente obtenemos la constante de gravitación:

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2.$$

b) Consideramos el momento angular de la Tierra y de la nave, alrededor del Sol, en el punto en que ambos se encuentran (aunque no chocan, suponemos que su separación es despreciable respecto a la distancia R al Sol). Aplicamos la conservación del momento angular:

$$mR\Delta v + M_T R \Delta v_T = 0,$$

donde m es la masa de la nave, M_T la masa de la Tierra, y Δv y Δv_T son los cambios de velocidad que experimenta la nave y la Tierra, respectivamente. Así,

$$\Delta v_T = -\frac{m}{M_T} \Delta v.$$

Del signo de la expresión anterior interpretamos que la Tierra se frena si la nave aumenta su velocidad. Utilizando los datos que proporciona el enunciado, obtenemos el cambio de velocidad que sufre la Tierra:

$$\Delta v_T = \frac{6 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{24}} \cdot 5,5 = -5,5 \times 10^{-21} \text{ km/s}.$$

Por otro lado, a partir de la velocidad orbital $v_T = \sqrt{\frac{GM_{\text{Sol}}}{R}}$, el cambio de velocidad de la Tierra puede estimarse en primera aproximación como

$$\frac{\Delta v_T}{v_T} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta R}{R} \rightarrow \Delta R = \frac{T}{\pi} \Delta v_T,$$

donde T es el período orbital de la Tierra (1 año).

Por tanto, la variación en el radio de la órbita es

$$\Delta R = 5,5 \times 10^{-14} \text{ m.}$$

Concluimos que, al frenarse, la Tierra aumenta el radio de su órbita. Sin embargo, esta cantidad es insignificante por ser la Tierra mucho más masiva que la nave.

c) Teniendo en cuenta la ecuación del efecto Doppler que da la variación de la frecuencia observada en función de la frecuencia original, la velocidad de la onda y la velocidad del emisor, podemos estimar que el error en la frecuencia, δf , de la onda y el error en la velocidad del emisor, δv , se relacionan a través de la expresión

$$\delta f / f = \delta v / c,$$

donde c es la velocidad de la onda electromagnética.

Con los datos del problema ($\delta f = 0,4 \text{ Hz}$ y $f = 2040 \times 10^6 \text{ Hz}$) obtenemos el error en la velocidad:

$$\delta v = 0,059 \text{ m/s.}$$

Este sería el error con que podría estimarse la velocidad de los vientos considerando la imprecisión de 0,4 Hz que se tiene en el control de la frecuencia que emite la sonda. Este error es menor que 1 m/s y, por tanto, sí se pudo satisfacer la precisión requerida en la misión para medir los vientos de Titán.

Saber más

<https://saturn.jpl.nasa.gov>.

<https://www.jpl.nasa.gov/missions/cassini-huygens>.

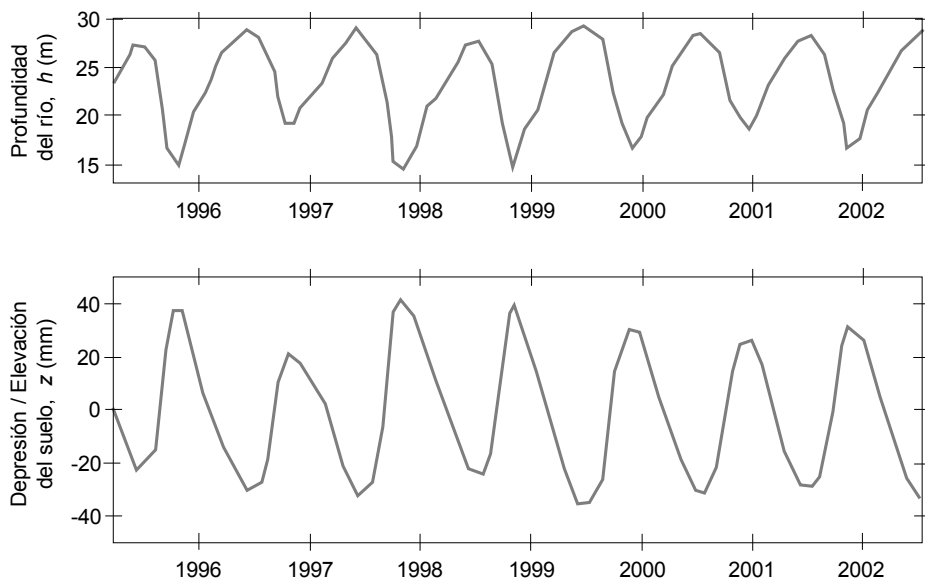
<http://sci.esa.int/cassini-huygens>.

Bird, M.K. *et al.* (2002). "The Huygens Doppler wind experiment". *Space Science Reviews* 104, pp. 613-640.

* Las asistencias gravitatorias permiten ahorrar combustible de los cohetes, ya que aprovechan el "tirón" gravitatorio de un planeta para catapultar a una nave que pasa cerca. También se pueden utilizar para frenar la nave. Cuando una nave pasa muy cerca de un planeta, se dice que ha realizado un *flyby*. Los *flybys* se utilizan conseguir precisamente una asistencia gravitatoria del planeta, o para la exploración del propio planeta. Las asistencias gravitatorias necesitan del cálculo de complejas trayectorias que implican una "ventana de lanzamiento" de acuerdo a la posición del planeta prevista cuando la nave vaya a pasar cerca.

2. Crecidas del Amazonas

Mediante medidas realizadas con GPS se descubrió* que en la cuenca del río Amazonas (el mayor del mundo en caudal) la superficie terrestre se deforma debido a la presión que ejerce la enorme masa de agua que circula por el río. La deformación no es constante, sino que depende del nivel de agua. Las siguientes gráficas muestran el ciclo de crecidas del Amazonas y las oscilaciones de la elevación terrestre registradas en su cuenca año a año.



a) Estima a partir de las gráficas cuánto valen, aproximadamente, el período y la amplitud de oscilación de la profundidad h del río, y la amplitud de oscilación de la altura z de la superficie terrestre. Indica si existe o no desfase entre las dos variaciones. Obtén una expresión en función del tiempo, de tipo seno o coseno, que describa aproximadamente las oscilaciones de h y de z .

b) El proceso de deformación (de tipo elástico) que sufre la corteza terrestre viene dado por la relación lineal $P = Kz$, donde P es la presión ejercida por la masa de agua. Encuentra el valor de la constante M . (Ayuda: Halla primero el valor de P a partir de la masa de una columna de agua de altura h . Densidad del agua: 1 kg/dm^3).

Resolución

a) Observando la primera gráfica, es fácil comprobar que el período de oscilación de la profundidad del río es

$$T = 1 \text{ año}.$$

Y su amplitud de oscilación es

$$A_h \approx 7 \text{ m}.$$

De la segunda gráfica obtenemos la amplitud de la variación de la posición del suelo:

$$A_z \approx 30 \text{ mm}.$$

Salta a la vista el hecho de que ambas oscilaciones están correlacionadas, y que el desfase que existe entre ellas es π . Como era de esperar, cuanto más profundidad tiene el río más se deprime el suelo por el peso del agua.

También obtenemos de las gráficas los valores medios en torno a los cuales oscilan cada una de las magnitudes:

$$\bar{h} = 22 \text{ m}, \quad \bar{z} = 0 \text{ mm}.$$

Por tanto, podemos describir la variación de h y de z en función del tiempo como una oscilación armónica:

$$h(t) = 22 - 7 \cos(2\pi t) \text{ m},$$

$$z(t) = 30 \cos(2\pi t) \text{ mm},$$

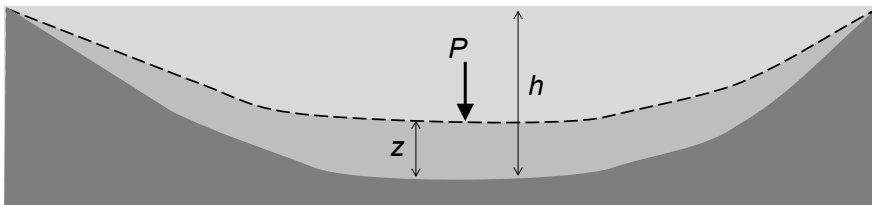
donde el tiempo está expresado en años en ambos casos.

b) El volumen de una columna de agua de altura h es $V = hS$. Sabiendo que $\rho_{\text{agua}} = 1000 \text{ kg/m}^3$, la masa de una columna de agua de altura h es

$$m = \rho_{\text{agua}} V = \rho_{\text{agua}} hS.$$

Hallamos ahora la fuerza que ejerce la columna de agua:

$$F = mg = \rho_{\text{agua}} hSg.$$



Dado que presión es, por definición, fuerza por unidad de superficie, tenemos

$$P = \rho_{\text{agua}} hg = 10^3 \cdot 9,8 \cdot h \text{ Pa}.$$

Si suponemos que es válida la relación lineal $P = Kz$, y dado que $A_h = 7 \text{ m}$ y $A_z = 30 \text{ mm}$ (por lo visto en el apartado anterior), se ha de cumplir

$$10^3 \cdot 9,8 \cdot 7 = K \cdot (30 \cdot 10^{-3}).$$

Por tanto, obtenemos para la constante pedida el valor

$$K = \frac{10^3 \cdot 9,8 \cdot 7}{30 \cdot 10^{-3}} \frac{\text{Pa}}{\text{m}} = 2,3 \times 10^6 \text{ N/m}^3.$$

Saber más

* Las medidas experimentales de las fluctuaciones de la cuenca del Amazonas están publicadas en el artículo:

Bevis, M. *et al.* (2005). "Seasonal fluctuations in the mass of the Amazon River system and Earth's elastic response". *Geophysical Research Letters* 32, pp. 1-4.

3. Saques y pases en fútbol

Para realizar un lanzamiento largo y/o rápido, los jugadores de fútbol deben proyectar el balón con la mayor velocidad posible y con el ángulo apropiado. Podemos estudiar las condiciones óptimas mediante las ecuaciones de la cinemática (tiro parabólico). Despreciamos el rozamiento con el aire.

a) Demuestra que si el balón se chuta desde el suelo el ángulo de tiro (respecto a la horizontal) que produce el alcance máximo es 45° . ¿Cuánto se acorta el alcance con un lanzamiento de 25 m/s de velocidad inicial si cometemos un error de 5° respecto al ángulo óptimo? ¿Qué error se comete en el alcance máximo para un lanzamiento de 25 ± 1 m/s de velocidad inicial?

b) Para anticiparse a la reacción del contrario, a veces en los saques y en los pases no interesa alcanzar la distancia máxima sino lograr un tiempo de vuelo corto. Calcula, para un disparo con velocidad inicial de 25 m/s, qué distancia se pierde con respecto al alcance máximo si queremos que el vuelo del balón dure medio segundo menos (lógicamente, hay que lanzar con un ángulo menor que 45°).

c) En el saque de banda el balón se lanza por encima de la cabeza desde una cierta altura h sobre el suelo. Demuestra que el alcance máximo ocurre para un ángulo óptimo, α_{opt} , tal que

$$\tan \alpha_{\text{opt}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2gh/v^2}},$$

donde g es la gravedad y v la velocidad inicial de lanzamiento.

d) Realiza una representación de α_{opt} en función de h , para una velocidad de saque de 15 m/s. Haz la gráfica representando puntos cada 0,5 m en el rango $h \in [0, 2,5]$ m, y une los puntos con una línea. ¿Con qué ángulo debe sacar un jugador que lanza desde 2,2 m de altura para lograr el máximo alcance?

e) El ángulo obtenido sería válido si el jugador siempre lanzara con la misma velocidad. Pero esto no es cierto, ya que cuesta más lanzar hacia arriba. Debido a nuestra biomecánica corporal, la velocidad de lanzamiento disminuye* con el ángulo según la expresión $v(\alpha) = 16 - 0,09\alpha$, con α en grados. Calcula, con las ecuaciones del tiro parabólico, los valores del alcance para $\alpha \in [20^\circ, 40^\circ]$, de 5 en 5 grados, para el jugador anterior ($h = 2,2$ m). Representa el alcance en función del ángulo y estima a partir de la gráfica cuál es el ángulo óptimo de lanzamiento.

Resolución

a) Si lanzamos el balón con una velocidad de módulo v y con un ángulo α respecto al suelo, las ecuaciones de la posición del balón serán las del tiro parabólico:

$$y = (v \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow y = 0 \rightarrow t = \frac{2v \sin \alpha}{g},$$
$$x = (v \cos \alpha) t.$$

Designemos con la letra A al valor del alcance en el eje X . Para el valor de t obtenido anteriormente (para el cual $y = 0$), tenemos que el alcance es

$$A = v \cos \alpha \frac{2v \sin \alpha}{g} = \frac{v^2}{g} \sin 2\alpha .$$

Imponemos a A la condición matemática de máximo:

$$\frac{dA}{d\alpha} = \frac{v^2}{g} 2 \cos 2\alpha = 0 \rightarrow 2\alpha = 90^\circ \rightarrow \alpha = 45^\circ ,$$

de modo que el alcance máximo es $A_{\max} = \frac{v^2}{g}$.

Calculamos ahora el error en $A_{\max}$ para una velocidad $v = 25 \pm 1$ m/s. Diferenciamos respecto de la variable v sujeta a error:

$$\delta A_{\max} = \frac{2v}{g} \delta v = \frac{2 \cdot 25 \cdot 1}{9,8} = 5,1 \text{ m}.$$

Podemos concluir que para una velocidad $v = 25 \pm 1$ m/s y un ángulo $\alpha = 45^\circ$, el alcance máximo es $A_{\max} = 63,8 \pm 5,1$ m. Observamos que un pequeño error en la velocidad puede suponer que el balón llegue o no al jugador deseado.

Si cometemos un error de 5° en el ángulo: $\alpha = 40^\circ$ o $\alpha = 50^\circ$, con $v = 25$ m/s, y resulta $A = 63,8 \cdot \sin 80^\circ = 62,8 \cdot \sin 100^\circ = 62,8$ m. Por tanto, $A_{\max} - A = 1$ m, es decir, el alcance se acorta en 1 m.

b) El tiempo óptimo es aquel que resulta de sustituir en la expresión correspondiente el valor $\alpha_{\text{opt}} = 45^\circ$:

$$t_{\text{opt}} = \frac{2v \sin \alpha}{g} = \frac{2v \sqrt{2}}{g} = \frac{\sqrt{2} \cdot 25}{9,8} = 3,6 \text{ s}.$$

Si restamos medio segundo, según dice el enunciado, tenemos: $t = 3,6 - 0,5 = 3,1$ s. Para este nuevo valor del tiempo resulta el ángulo

$$\sin \alpha = \frac{3,1 \cdot 9,8}{2 \cdot 25} \rightarrow \alpha = 37,4^\circ .$$

Dado que $A = (v \cos \alpha) t$, tenemos: $A = 25 \cdot \cos(37,4^\circ) \cdot 3,1 = 61,6$ m.

De modo que el tiro se acorta una distancia: $A_{\max} - A = 63,8 - 61,6 = 2,2$ m.

c) La ecuación que gobierna el movimiento en el eje Y es

$$h = \frac{1}{2} g t^2 - (v \sin \alpha) t \rightarrow t = \frac{v \sin \alpha + \sqrt{v^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{g} .$$

Sustituyendo t en la expresión para A , queda

$$A = (v \cos \alpha) t = \frac{v^2 \sin \alpha \cos \alpha + v \cos \alpha \sqrt{v^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{g} .$$

Imponemos la condición de máximo sobre $A g / v^2$ por comodidad: $\frac{d}{d\alpha} (A g / v^2) = 0$,

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos \alpha \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sqrt{\sin^2 \alpha + 2gh/v^2}} - \sin \alpha \sqrt{\sin^2 \alpha + 2gh/v^2} = 0.$$

Buscamos el valor de α para el cual se satisface la igualdad anterior:

$$(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha + 2gh/v^2} = \sin \alpha (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + \sin \alpha \cdot 2gh/v^2.$$

Elevamos al cuadrado la anterior expresión:

$$\begin{aligned} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2 \cdot (\sin^2 \alpha + 2gh/v^2) &= \sin^2 \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2 + \\ &+ \sin^2 \alpha \cdot \frac{4g^2 h^2}{v^4} + 2 \sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \cdot \frac{2gh}{v^2}. \end{aligned}$$

Cancelando términos y simplificando, llegamos a

$$(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha) \frac{2gh}{v^2} = \sin^2 \alpha \cdot \frac{4g^2 h^2}{v^4}.$$

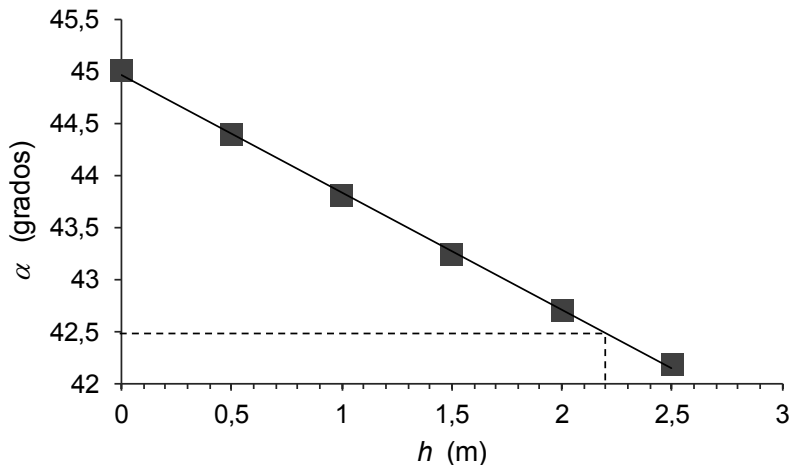
La expresión en el segundo paréntesis es igual a 1 puesto que $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$.

Así, queda $\cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha \cdot (1 + \frac{2gh}{v^2})$, y finalmente:

$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + 2gh/v^2}},$$

tal y como queríamos demostrar. También puede demostrarse que $A = \frac{v^2}{g} \frac{1}{\tan \alpha}$.

d) Hacemos la representación gráfica que se pide para $v = 15$ m/s:



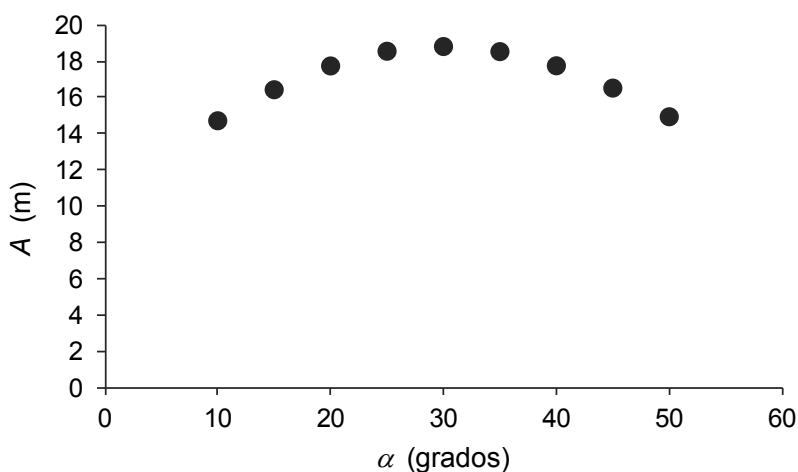
A partir de la gráfica, para $h = 2,2$ m, obtenemos el ángulo

$$\alpha_{opt} = 42,5^\circ.$$

e) Construimos una tabla con los valores de la expresión $v(\alpha) = 16 - 0,09\alpha$ en función de los de α , y los del alcance A en función de los de v y α , para $h = 2,2$ m:

α (°)	v (m/s)	$A = \frac{v^2}{2g} \sin 2\alpha + \frac{v}{g} \cos \alpha \sqrt{v^2 \sin^2 \alpha + 2gh}$ (m)
10	15,10	14,71
15	14,65	16,42
20	14,20	17,73
25	13,75	18,54
30	13,30	18,80
35	12,85	18,52
40	12,40	17,74
45	11,95	16,51
50	11,50	14,93

Representamos el alcance en función del ángulo:



Tanto en la tabla como en la gráfica se puede observar que el ángulo óptimo para el cual se alcanza el alcance máximo es $\alpha_{\text{opt}} = 30^\circ$. Y para dicho ángulo, el alcance máximo es 18,8 m.

Saber más

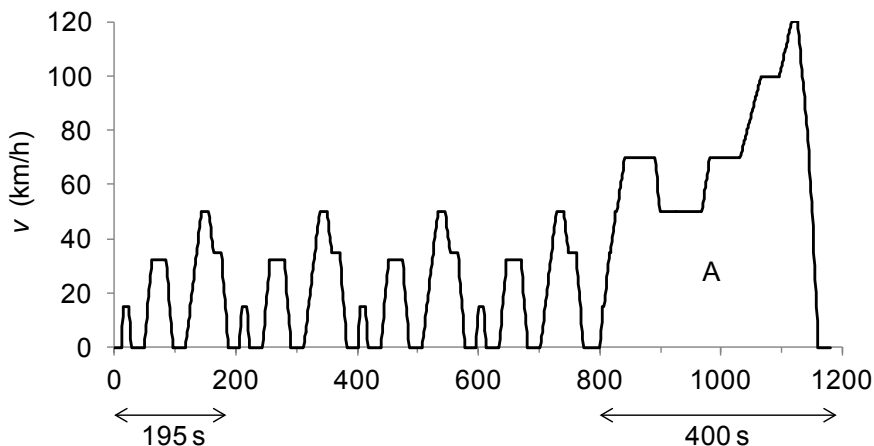
* Sobre biomecánica del saque ver el artículo:

Linthorne, N.P. y Everett, D.J. (2006). "Release angle for attaining maximum distance in the soccer throw-in". *Sports Biomechanics* 5(2), pp. 243-60.

El jugador de fútbol inglés Rory Delap era capaz de sacar a 60 km/h con alcances de más de 30 m.

4. Consumo homologado de combustible

El consumo homologado de combustible de los vehículos se basa en una prueba que simula las condiciones de conducción en dos regímenes: urbano y extraurbano*. Durante el régimen urbano se repite en cuatro ocasiones un ciclo de 195 s de duración que incluye arrancadas, detenciones y circulación a bajas velocidades. El recorrido extraurbano es un ciclo único que dura 400 s. La figura muestra la velocidad en función del tiempo a lo largo de la prueba.



a) Obtén la aceleración del vehículo en la primera parte del ciclo extraurbano (A, en la figura). ¿En cuánto tiempo pasará de 0 a 100 km/h con esa aceleración?

b) Obtén a partir de la gráfica la distancia recorrida en el tramo urbano (total de los cuatro ciclos), la distancia recorrida en el tramo extraurbano y la distancia total de la prueba. Estima la velocidad media durante toda la prueba.

c) Para un cierto vehículo se midieron los consumos 7,3, 7,2, 6,8 y 7,1 litros/100 km, para cada uno de los cuatro ciclos del recorrido urbano, y un consumo de 4,3 litros/100 km para el recorrido extraurbano. Calcula el consumo medio urbano. Calcula el consumo mixto haciendo la media ponderada de los consumos urbano y extraurbano. (Ayuda: el tramo extraurbano corresponde exactamente al 63,2 % de la longitud total de la prueba).

Resolución

En primer lugar tenemos que fijar las escalas que vamos a emplear. Superponemos la gráfica a una hoja de papel milimetrado:

Escala X: $20 \text{ mm} = 195 \text{ s} \rightarrow 1 \text{ mm} = 195 / 20 \text{ s} = 9,75 \text{ s}.$

Escala Y: $20 \text{ mm} = 50 \text{ km/h} \rightarrow 1 \text{ mm} = 2,5 \text{ km/h}.$

a) En la primera parte del tramo A el tiempo empleado, según la escala milimetrada del eje X, es $4,25 \text{ mm} \times 9,75 \text{ s/mm} = 41,44 \text{ s}.$

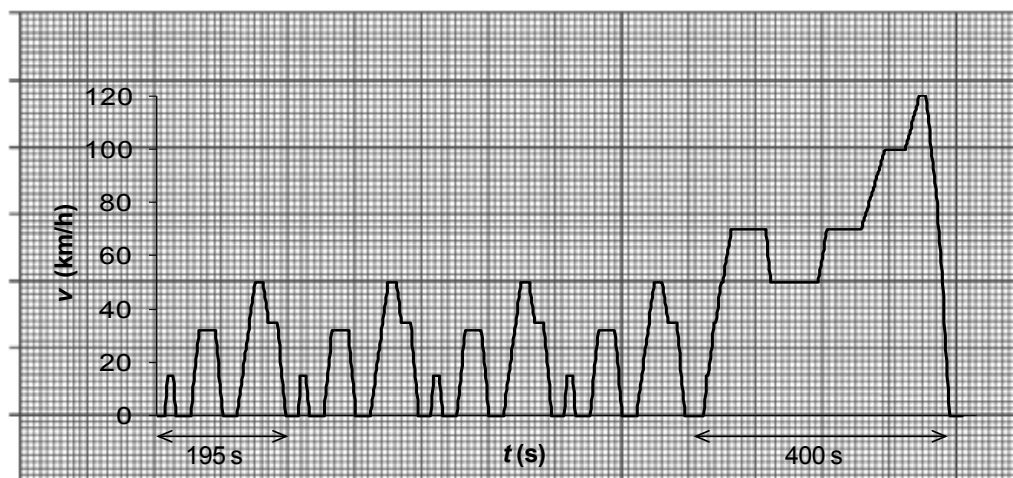
La velocidad final alcanzada es (eje Y) $28 \text{ mm} \times 2,5 \text{ km/h/mm} = 70 \text{ km/h}.$

Por tanto, la aceleración será, aproximadamente

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{70 \text{ km/h}}{41,44 \text{ s}} = 0,47 \text{ m/s}^2 = 1,69 \text{ (km/h)/s}.$$

De modo que, para pasar de 0 a 100 km/h, se necesita un tiempo

$$t = \frac{100 \text{ km/h}}{1,69 \text{ km/h}} \text{ s} = 59,2 \text{ s}.$$



b) Sabemos que $v = \frac{\Delta d}{\Delta t} \rightarrow \Delta d = v \Delta t$. Integrando podemos hallar la distancia recorrida: $d = \int_{t_1}^{t_2} v dt$.

Hemos, pues, de calcular el área que queda por debajo de la curva graficada. Para ello contaremos el número de cuadraditos que quedan dentro de la curva. El área de cada cuadradito (1 mm^2) es

$$2,5 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times 9,75 \text{ s} = 6,77 \text{ m}.$$

El número aproximado de cuadraditos que contamos es 146 por cada ciclo de 195 s (tres picos: $7 + 45 + 94 = 146$). Puesto que el tramo urbano consta de 4 ciclos, el número de cuadraditos contenidos será, en total,

$$146 \cdot 4 \text{ ciclos} = 584 \rightarrow d_{\text{urbano}} = 584 \cdot 6,77 \text{ m} = 3954 \text{ m}.$$

El número de cuadraditos que contamos en la zona no cíclica del tramo extraurbano es 1024 (aproximadamente), por lo que

$$d_{\text{extraurbano}} = 1024 \cdot 6,77 \text{ m} = 6932 \text{ m}.$$

(Como comprobación, observamos que la anterior cantidad representa el 63,7 % del total, que se aproxima en buena medida al 63,2 % que nos indica el enunciado).

Por tanto,

$$d_{\text{total}} = 6,932 \text{ km} + 3,954 \text{ km} = 10,886 \text{ km}.$$

Por otro lado, tenemos que el tiempo total transcurrido es

$$t_{\text{total}} = 195 \cdot 4 + 400 = 1180 \text{ s} = 0,327 \text{ h}.$$

Hallamos la velocidad pedida:

$$v = \frac{10,886 \text{ km}}{0,327 \text{ h}} = 33,2 \text{ km/h}.$$

c) Hacemos la media aritmética de los datos aportados para los cuatro ciclos del tramo urbano, resultando el valor siguiente para el consumo del coche:

$$7,1 \text{ litros/100 km}.$$

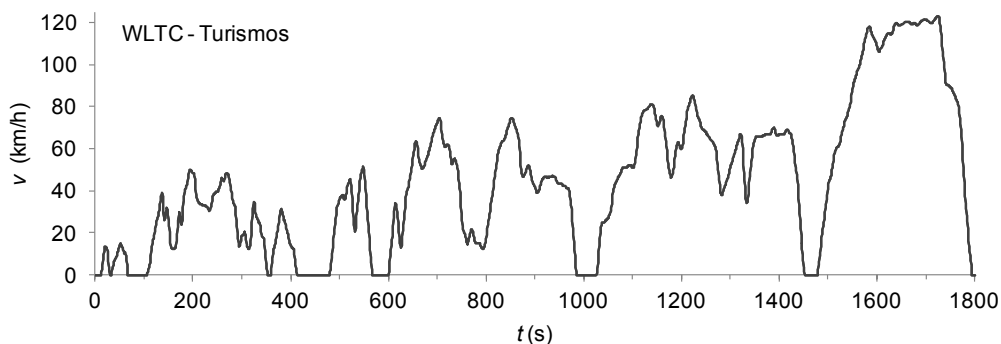
Calculamos el total con la media ponderada:

$$7,1 \cdot 36,8\% + 4,3 \cdot 63,2\% = 5,33 \text{ litros/100 km}.$$

Saber más

* Los datos de la gráfica corresponden al denominado Nuevo Ciclo de Conducción Europeo (NEDC), según la normativa europea 98/69/EC sobre consumo y emisiones. Las medidas de consumo homologado se realizan funcionando el motor en un banco dinamométrico y tomando muestras de los gases de emisión. Según la cantidad de gases recogidos se calcula el consumo de combustible de acuerdo a la reacción química de combustión de la gasolina o del gasóleo.

Debido a la evolución de la tecnología y las nuevas formas de conducción, el antiguo ciclo de homologación NEDC fue sustituido en 2018 por el nuevo Procedimiento de Ensayo de Vehículos Ligeros Armonizado a Nivel Mundial (reglamento europeo 2017/1151). Este nuevo ciclo de conducción WLTC se divide en cuatro partes correspondientes a la circulación urbana, interurbana, circunvalaciones y autopistas o autopistas, y dura 30 min (en vez de 20 min) con una distancia total de 22,649 km.



https://es.wikipedia.org/wiki/New_European_Driving_Cycle.

<https://es.wikipedia.org/wiki/WLTP>.

Regulación europea: <https://unece.org/transport/vehicle-regulations/>.

5. Misión THEMIS

En la misión THEMIS de la NASA para el estudio de la magnetosfera terrestre se lanzaron cinco satélites idénticos cuyos radios orbitales medios van desde los 6,6 a los 16,7 radios terrestres.

a) Sabiendo que la órbita menor es *geosíncrona*, determina el período (en días) de la órbita mayor.

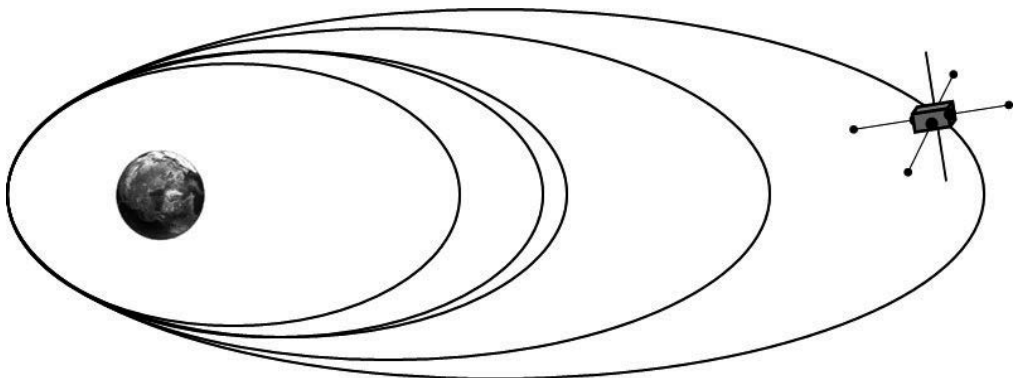
Las órbitas de estos satélites son muy elípticas. Las altitudes en los apogeos son aproximadamente de 10, 12, 12, 20 y 30 radios terrestres, respectivamente, para cada uno de los satélites.

b) Calcula la excentricidad de las dos órbitas extremas.

c) Calcula la menor altitud a la que pasa alguno de los satélites.

d) Obtén cuánto vale, para el satélite de menor órbita, la relación de velocidades del periastro al apoastro.

Notas: una órbita geosíncrona* es aquella cuyo periodo orbital coincide con el periodo de rotación de la Tierra. El apogeo y el perigeo son los puntos de la órbita que están más lejos y más cerca, respectivamente, del centro de la Tierra.



Resolución

El período orbital de un satélite alrededor de la Tierra, de masa M_T , se relaciona con el semieje mayor de la órbita, a , mediante la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{a^3}{GM_T}.$$

Si la órbita es circular, el semieje mayor de la elipse coincide con el radio orbital. En general, para órbitas elípticas el semieje mayor es el valor medio de las distancias orbitales al apogeo, r_a , y al perigeo, r_p :

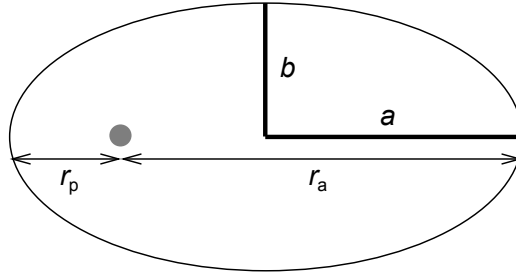
$$a = \frac{r_a + r_p}{2}.$$

Nótese que todas las distancias a , r_a y r_p se miden desde el centro de la Tierra.

La excentricidad de una elipse es

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

donde a y b son los semiejes mayor y menor, respectivamente.



a) Si numeramos del 1 al 5 a los satélites de acuerdo al tamaño de su órbita, el período del satélite con mayor órbita, a partir de la ley de Kepler, es

$$T_5 = \left(\frac{a_5}{a_1} \right)^{3/2} T_1,$$

donde sabemos por el enunciado que $T_1 = 1$ día (órbita geosíncrona). Para contestar la pregunta no necesitamos conocer ningún otro dato, como la masa o el radio de la Tierra, ya que basta saber la relación de radios entre el satélite 5 y el satélite 1. El período del satélite con mayor órbita es

$$T_5 = \left(\frac{16,7}{6,6} \right)^{3/2} \cdot 1 = 4 \text{ días}.$$

b) Se demuestra que

$$r_a = (1 + e)a,$$

$$r_p = (1 - e)a.$$

Por tanto, la excentricidad, conocidos los valores de a y r_a que da el enunciado, es

$$e = \frac{r_a}{a} - 1.$$

Al valor de altitud de los apogeos del enunciado hay que sumar un radio terrestre para obtener r_a medido desde el centro de la Tierra. Las excentricidades de las dos órbitas extremas (las de los satélites 1 y 5) resultan

$$e_1 = \frac{r_{a1}}{a_1} - 1 = \frac{10 + 1}{6,6} - 1 = 0,67,$$

$$e_2 = \frac{r_{a2}}{a_2} - 1 = \frac{30 + 1}{16,7} - 1 = 0,86.$$

c) La distancia al perigeo es $r_p = 2a - r_a$. Así,

$$r_{p1} = 2a_1 - r_{a1} = 2 \cdot 6,6 - (10 + 1) = 2,2 \text{ radios terrestres ,}$$

$$r_{p5} = 2a_5 - r_{a5} = 2 \cdot 16,7 - (30 + 1) = 2,4 \text{ radios terrestres .}$$

Por tanto, la menor altitud (medida desde la superficie terrestre, no desde el centro de la Tierra) será la del satélite 1 en su perigeo:

$$h_1 = r_{p1} - 1 = 2,2 - 1 = 1,2 \text{ radios terrestres .}$$

d) Por conservación del momento angular, el producto de la velocidad y el radio orbital en cada punto de la órbita es constante. Por tanto, la relación pedida es

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} = \frac{11}{2,2} = 5 .$$

El satélite 1 se mueve 5 veces más rápido cuando pasa cerca de la Tierra que cuando se encuentra en el punto más alejado.

Saber más

El nombre THEMIS se puso como acrónimo de *Time History of Events and Macroscale Interactions during Substorms*. Se inició en febrero de 2007 con el objetivo de estudiar los procesos que producen las erupciones de las auroras boreales en la magnetosfera terrestre.

Curiosamente, los cinco satélites fueron lanzados a la vez mediante un mismo cohete.

Durante la misión las órbitas se fueron modificando varias veces, orientando la secuencia de satélites para observar distintas regiones de la magnetosfera. Esto se hace con propulsión de los motores de los propios satélites. Tras dos años de misión, dos de los satélites se desplazaron a órbitas lunares para estudiar la Luna. Esta submisión se denominó ARTEMIS (*Acceleration, Reconnection, Turbulence and Electrodynamics of the Moon's Interaction with the Sun*).

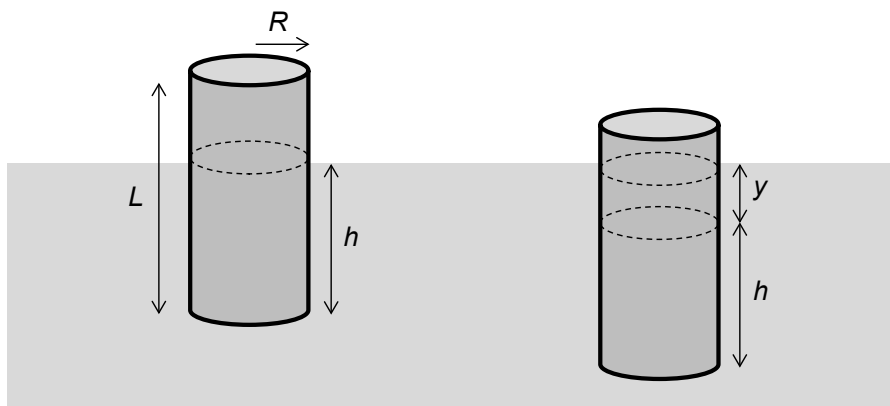
Página web de la misión: <https://www.nasa.gov/themis-and-artemis/>.

Página web con las órbitas de THEMIS: <http://themis.ssl.berkeley.edu/orbits.shtml>.

* No confundir órbita geosíncrona con órbita geoestacionaria. La geoestacionaria es una órbita geosíncrona circular y en el plano del ecuador.

6. Boya osciladora

Una boya cilíndrica de altura L , radio R y densidad ρ está flotando en la superficie del agua.



- Obtén la altura h de la parte sumergida.
- Un niño hunde un poco la boya y la suelta, y entonces la boya comienza a oscilar verticalmente. Propón una expresión para el período de oscilación de la boya.
- Si la boya flota, en vez de en posición vertical, acostada a lo largo del eje del cilindro, ¿podrías obtener el período de oscilación de la misma manera?

Resolución

- En el equilibrio, el peso se compensa con el empuje que ejerce el agua sobre la boya:

$$P = E \rightarrow mg = m_a g ,$$

donde m es la masa total de la boya y m_a es la masa del agua desalojada por la parte sumergida de la boya. Como es cilíndrica, su volumen es $\pi R^2 L$ y el volumen sumergido es $\pi R^2 h$. Teniendo en cuenta que la densidad es la masa entre el volumen, podemos reescribir el anterior balance de fuerzas y obtener h en la situación de equilibrio:

$$\rho \pi R^2 L = \rho_a \pi R^2 h \rightarrow h = \frac{\rho}{\rho_a} L ,$$

donde ρ_a es la densidad del agua.

- Supongamos que hundimos la boya una profundidad adicional y . Entonces hay una fuerza neta vertical dada por

$$F = P - E = \rho \pi R^2 L g - \rho_a \pi R^2 (h + y) g \rightarrow F(y) = -\pi R^2 \rho_a g y .$$

Por la 2ª ley de Newton:

$$F(y) = -\pi R^2 \rho_a g y = m \frac{d^2 y}{dt^2} = \pi R^2 L \rho \frac{d^2 y}{dt^2} .$$

Queda una ecuación diferencial similar a la de la oscilación de un muelle o de un péndulo de frecuencia angular ω :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} \equiv -\omega^2 y = -\frac{\rho_a g}{\rho L} y .$$

Identificando la frecuencia y los parámetros del problema, obtenemos

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\rho_a g}{\rho L}} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho L}{\rho_a g}} .$$

Cuanto menos densa y más larga sea la boya, más rápido oscilará.

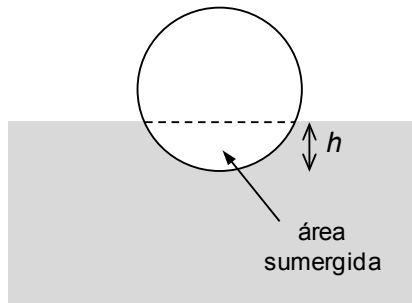
La sección de la boya no influye en su período de oscilación. Por tanto, la boya podría ser, por ejemplo, con forma de paralelepípedo y el resultado sería el mismo.

c) Si la boya está acostada tenemos un cilindro horizontal. Entonces, la sección sumergida es un *segmento circular* cuya área no depende linealmente de la profundidad sumergida. Puede demostrarse que dicha área es

$$A = R^2 \arccos\left(\frac{R-h}{R}\right) - (R-h)\sqrt{R^2 - (R-h)^2} .$$

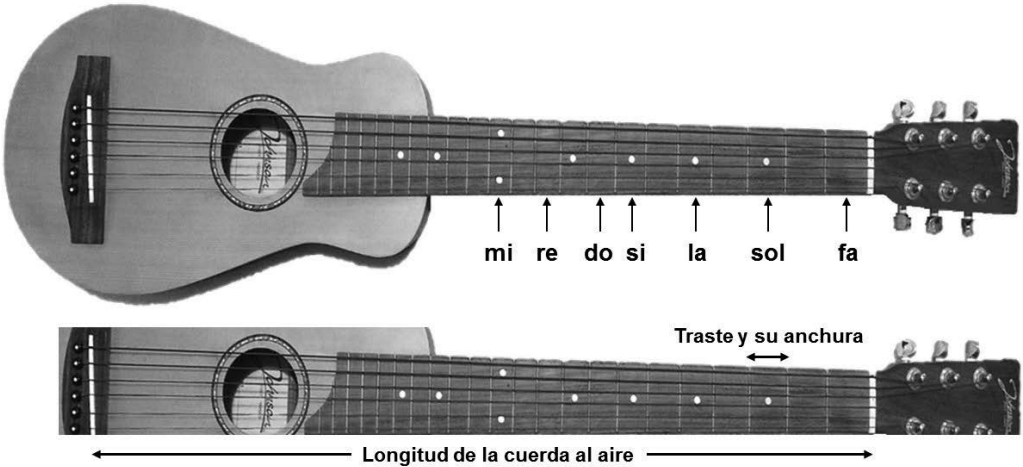
La ecuación que gobierna el movimiento ya no es la del movimiento armónico simple y no podemos obtener el período de oscilación con el procedimiento anterior.

Lo mismo ocurre si consideramos las oscilaciones de una esfera, por ejemplo las de una pelota flotando en el agua; sus oscilaciones no son armónicas.



7. Una guitarra y sus trastes que se ha ido al traste

En la figura se muestran las posiciones donde se coloca el dedo sobre la cuerda de una guitarra, para distintas notas. Al ejercer presión sobre la cuerda, se acorta su longitud y cambia la frecuencia del sonido emitido.



En una guitarra se han medido las anchuras de los trastes y las frecuencias de vibración de la primera cuerda correspondientes a las posiciones de las notas mi (cuerda al aire), fa, sol, la, si, do, re, mi. En la tabla se indican los resultados obtenidos, junto a la frecuencia natural de afinación de cada nota. La longitud de la cuerda al aire, sin presionar ningún traste, es de 64,9 cm.

Nota	Frecuencia natural (Hz)	Frecuencia medida (Hz)	Traste	Anchura del traste (cm)
MI	329,63	330	Cuerda al aire	
FA	349,23	349	1º	3,60
FA#	369,99		2º	3,40
SOL	392,00	392	3º	3,25
SOL#	415,30		4º	3,00
LA	440,00	440	5º	2,90
LA#	466,16		6º	2,70
SI	493,88	483	7º	1,55
DO	523,25	520	8º	2,40
DO#	554,37		9º	2,30
RE	587,33	570	10º	2,10
RE#	622,25		11º	2,00
MI	659,26	636	12º	1,90

a) Realiza una gráfica con los valores medidos de frecuencia en el eje de ordenadas y con una variable x tal que la ley física representada sea lineal. Dibuja tantos puntos como sea posible a partir de los datos disponibles. Traza la recta que mejor une todos

los puntos y estima, a partir de la pendiente de dicha recta, la velocidad de las ondas en la cuerda.

b) Esta guitarra se ha ido al traste, porque el fabricante cometió un error en la anchura de uno de los trastes. Indica en cuál y calcula la anchura correcta que debería haber tenido.

c) Si la precisión con la que se han situado los anclajes de los extremos fijos de la cuerda es de 0,5 mm, estima el error en la frecuencia con la que sonará la primera cuerda al aire (nota mi).

Resolución

En la cuerda se forman ondas estacionarias y, por tanto, la longitud de la cuerda, L , debe ser un múltiplo entero de la semilongitud de onda:

$$L = m \frac{\lambda}{2}.$$

Como la longitud de onda es igual a la velocidad de las ondas en la cuerda entre la frecuencia de vibración, $\lambda = v / f$, podemos relacionar la longitud de la cuerda con la frecuencia de la onda estacionaria en el modo fundamental ($m = 1$):

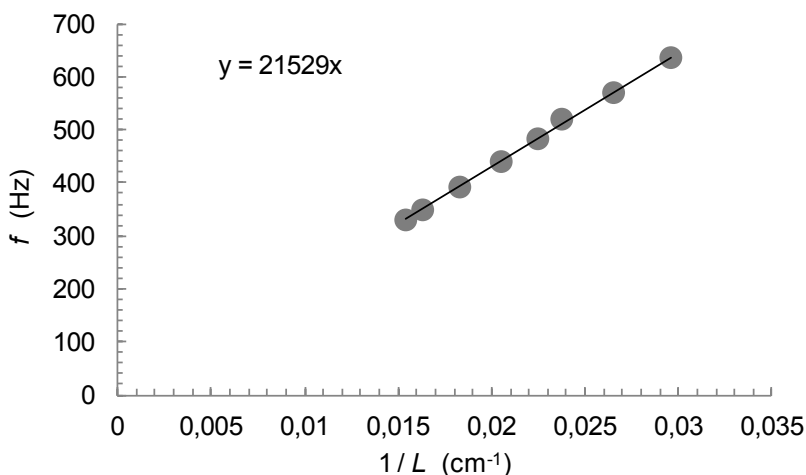
$$L = \frac{v}{2f} \rightarrow f = \frac{v}{2} \frac{1}{L}.$$

a) Llamando y a la frecuencia y x a la inversa de la longitud de la cuerda, la relación es lineal siéndola pendiente igual a la mitad de la velocidad.

Si llamamos A_n a la anchura del traste n y L_0 a la longitud de la cuerda al aire, la longitud de cada cuerda al presionar en un traste se acorta como

$$L_n = L_0 - \sum_1^n A_n.$$

Por tanto, representamos los valores de f frente a $1/L_n$.



Al hacer un ajuste por mínimos cuadrados, forzando a la recta a que pase por el origen, la pendiente es 21529 Hz/cm⁻¹. Entonces, la velocidad resultante es

$$v = 2 \cdot 21529 \text{ cm/s} = 430,58 \text{ m/s}.$$

b) Mirando la secuencia de las anchuras de los trastes en la tabla, vemos que la anchura del traste 7º debe estar equivocada pues no puede ser menor que las anchuras posteriores.

Se podría pensar que hay que descartar ese punto de la gráfica, pero no es así. Al ser el traste más corto de lo debido, lo que ocurre es que la frecuencia que emite la cuerda es menor que la frecuencia natural de la nota si (de hecho, eso es lo que ocurre si observamos la frecuencia medida). Pero el punto experimental es tan válido como los otros para calcular la velocidad.

Para estimar la anchura correcta que debería tener ese traste, utilizamos el valor obtenido para la velocidad y calculamos cuál debe ser la longitud de cuerda:

$$L = \frac{v}{2f} = \frac{434,72}{2 \cdot 493,88} = 44,01 \text{ cm}.$$

Finalmente, llegamos a la conclusión de que el 7º traste debería medir 2,6 cm y no 1,6 cm como ha diseñado este fabricante poco hábil. El error tiene como consecuencia que tanto la nota si como todas las siguientes más agudas suenen desafinadas.

c) Por propagación de errores

$$f_0 = \frac{v}{2} \frac{1}{L_0} \rightarrow \frac{\Delta f_0}{f_0} = \frac{\Delta L_0}{L_0}.$$

Entonces, como $f_0 = 330 \text{ Hz}$ y el error de la longitud es $0,5 \text{ mm} = 0,05 \text{ cm}$, resulta

$$\Delta f_0 = 330 \cdot \frac{0,05}{65} = 0,25 \text{ Hz}.$$

Saber más

La longitud vibrante de la cuerda recibe el nombre de *tiro*. Es la distancia que hay desde el puente donde apoyan las cuerdas hasta la cejuela que limita con el diapason.

En la guitarra española el tiro más común es el corto, de 65 cm. Pero también está la guitarra española de tiro largo, con 66,4 cm.

En las guitarras acústicas hay mucha más variabilidad y los tiros van desde los 58 cm a los 65 cm.

8. Sobre la velocidad de escape

Compara las velocidades de escape de:

- a) un elefante y un ratón, desde la superficie de la Tierra;
- b) una roca en la Luna y la misma roca en la Tierra;
- c) una persona en la superficie al nivel del mar y situada en lo alto del Everest;
- d) la Tierra y del Sistema Solar (estando en la Tierra).

Datos: $M_T = 81 M_L$, $R_T = 3,7 R_L$, $M_{\text{Sol}} = 335 \times 10^3 M_T$, $d_{T-\text{Sol}} = 23,5 \times 10^3 R_T$.

Resolución

La velocidad de escape de un planeta de masa M es $v = \sqrt{2GM/r}$, donde r es la distancia del cuerpo que escapa al centro del planeta.

a) La velocidad de escape no depende de la masa del cuerpo que escapa, así que es la misma para el elefante y el ratón.

b) El cociente de las velocidades de escape en las superficies de la Tierra y de la Luna es

$$\frac{v_T}{v_L} = \sqrt{\frac{M_T}{M_L} \frac{R_L}{R_T}} = \sqrt{\frac{81}{3,7}} = 4,7.$$

El resultado es independiente de la masa del cuerpo, es decir, el resultado es el mismo si la roca en la Luna es otra que la roca en la Tierra.

c) El cociente de las velocidades es

$$\frac{v_{\text{superficie}}}{v_{\text{Everest}}} = \sqrt{\frac{R_T + h}{R_T}} > 1.$$

Estrictamente hablando, la velocidad de escape en lo alto del Everest es menor, aunque la diferencia con su valor en la superficie terrestre es despreciable teniendo en cuenta que la altura del Everest es 8848 m y que el radio de la Tierra es 6371 km.

d) Desde un punto en la Tierra, para escapar del Sistema Solar hay que vencer la gravedad terrestre y la gravedad solar:

$$v_T^{SS} = \sqrt{\frac{2GM_{\text{Sol}}}{d_{T-\text{Sol}}} + \frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{2GM_{\text{Sol}}}{d_{T-\text{Sol}}} + v_T^2}.$$

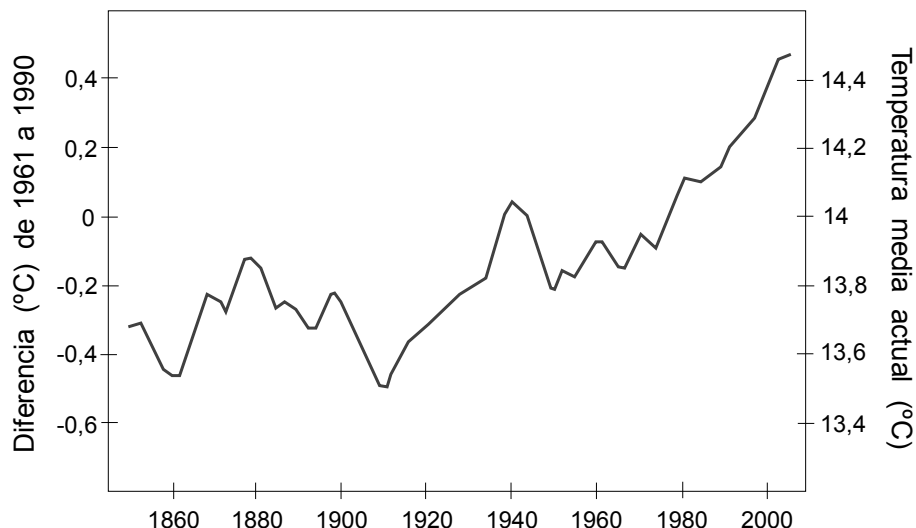
Comparando velocidades de escape resulta

$$\frac{v_T^{SS}}{v_T} = \sqrt{\frac{M_{\text{Sol}}}{M_T} \frac{R_T}{d_{T-\text{Sol}}} + 1} = \sqrt{\frac{335}{23,5} + 1} = 3,9.$$

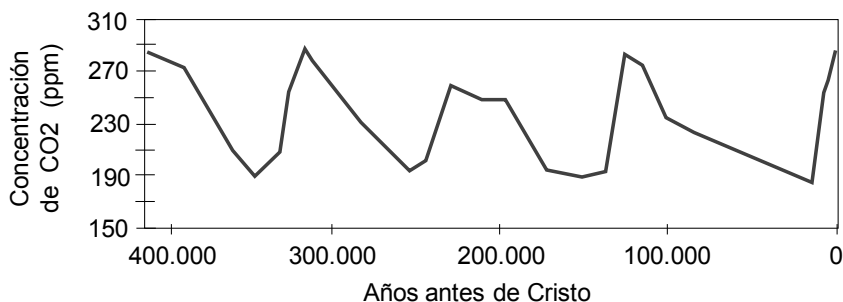
Como la velocidad de escape de la Tierra es 11,2 km/s (40 320 km/h), la velocidad de escape del Sistema Solar es 43,7 km/s (157 320 km/h), que son enormes.

9. Calentamiento global

a) En la gráfica se muestra la evolución de la temperatura media en la superficie terrestre desde mediados del siglo XIX hasta el año 2005. Calcula el ritmo de aumento de la temperatura, en grados por década, durante los últimos 150, 100, 50 y 25 años. Suponiendo que el calentamiento continúa al mismo ritmo de la última década, estima la temperatura media del planeta (con su error) en el año 2050.



b) Suponiendo que la concentración de CO_2 en la atmósfera a lo largo de la historia sigue la variación periódica mostrada en la siguiente gráfica, obtén aproximadamente la amplitud y el período de la oscilación. Da la expresión matemática en función del tiempo que describiría la variación de la concentración de CO_2 .



Resolución

a) Trazamos rectas en los intervalos de 150, 100, 50 y 25 años, desde 1855 hasta 2005, ajustando lo mejor posible la banda de puntos experimentales de la gráfica. Estimamos la pendiente de dichas rectas. Para la recta de los últimos 150 años la temperatura media pasa de $13,54^\circ\text{C}$ a $14,18^\circ\text{C}$. Por tanto, la pendiente es

$$\frac{14,18 - 13,54}{150} = 0,004^\circ\text{C/año} \rightarrow 0,04^\circ\text{C/década}.$$

Haciendo lo mismo para los otros tres intervalos, obtenemos:

$$\text{De 1905 a 2005: } \frac{14,29 - 13,56}{100} = 0,007 \text{ }^{\circ}\text{C/año} \rightarrow 0,07 \text{ }^{\circ}\text{C/década} .$$

$$\text{De 1955 a 2005: } \frac{14,40 - 13,77}{50} = 0,013 \text{ }^{\circ}\text{C/año} \rightarrow 0,13 \text{ }^{\circ}\text{C/década} .$$

$$\text{De 1980 a 2005: } \frac{14,47 - 14,02}{25} = 0,018 \text{ }^{\circ}\text{C/año} \rightarrow 0,18 \text{ }^{\circ}\text{C/década} .$$

Si el calentamiento continúa al mismo ritmo de la última década, es decir, si la temperatura sigue creciendo $0,018 \text{ }^{\circ}\text{C}$ por año, entonces en otros 45 años, desde 2005, habría un aumento de $0,018 \text{ }^{\circ}\text{C/año} \times 45 \text{ años} = 0,81 \text{ }^{\circ}\text{C}$ y la temperatura media en ese momento sería de $14,47 + 0,81 = 15,28 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

En los datos de la gráfica vemos que el error en el ajuste lineal de las temperaturas del último período es $0,05 \text{ }^{\circ}\text{C/década}$. Haciendo propagación de errores se obtiene un error de $0,225 \text{ }^{\circ}\text{C}$ en la temperatura final en 2050, así que el resultado final sería $T_{2050} = 15,3 \pm 0,2 \text{ }^{\circ}\text{C}$, lo que supone un aumento desde 2005 de entre 0,6 y $1,0 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

b) Si nos fijamos en la gráfica, por ejemplo, en los valles de los ciclos de la concentración de CO_2 en la atmósfera, vemos que tienen una periodicidad de aproximadamente 100 000 años. Los valores oscilan en torno a una concentración media de 230 p.p.m. (partes por millón) con una amplitud de unas 50 p.p.m. Por tanto, la expresión matemática que describe la concentración de CO_2 es

$$C(t) = 230 + 50 \cdot \cos(2\pi 10^{-5} t) .$$

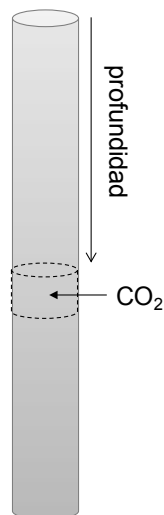
Saber más

Los valores de temperatura media global pueden consultarse en la página web del *Intergovernmental Panel on Climate Change* (IPCC), que reúne a miles de científicos de todo el mundo que estudian el cambio climático.

Los valores de concentración de CO_2 se obtuvieron en un núcleo de hielo de 3623 m de profundo en la estación rusa Vostok en la Antártida. El CO_2 se midió en las burbujas de aire en trozos de hielo a diferentes profundidades. Cada profundidad se corresponde con distintas épocas del pasado.

Para más información puede consultarse la página del CDIAC, *Carbon Dioxide Information Analysis Center*, del Departamento de Energía de EEUU: <https://cdiac.ess-dive.lbl.gov/>, y el artículo

“Climate and Atmospheric History of the Past 420,000 years from the Vostok Ice Core, Antarctica” (Petit, J.R. *et al.* 1999, *Nature* 399, pp. 429-436).



10. La mezcla, térmica, perfecta

Tenemos una botella de gaseosa de 1 L a temperatura ambiente de 20 °C y un bote de 33 cL en el frigorífico a 5 °C.

a) Queremos servir una jarra de medio litro a una temperatura de 15 °C. Indica razonadamente qué proporciones de cada recipiente emplearías para obtener la mezcla deseada.

b) ¿Cuál es la temperatura más baja a la que podríamos servir la jarra de medio litro?

Resolución

Se trata de un problema de intercambio de calor y conservación de la energía. El calor cedido por el líquido más caliente (el que está a 20 °C) debe ser igual al calor ganado por el líquido más frío (el que está en el frigorífico):

$$Q_{\text{cedido}} = Q_{\text{ganado}}.$$

a) El calor es $Q = mc_e \Delta T$, donde m es la masa de la sustancia, c_e su calor y ΔT el incremento de temperatura que experimenta. De esa manera, llamando m_1 a la masa que hemos de tomar del líquido a temperatura ambiente y m_2 a la masa de líquido refrigerado, se cumplirá que

$$m_1 c_e \cdot (20 - 15) = m_2 c_e \cdot (15 - 5).$$

No es necesario conocer el calor específico porque la mezcla es de una misma sustancia. La relación entre las masas de cada líquido es

$$5m_1 = 10m_2 \rightarrow m_1 = 2m_2.$$

Esa misma relación se dará entre los dos volúmenes mezclados, ya que la densidad es $\rho = m/V$. Por otra parte, como según el enunciado la suma de los volúmenes mezclados es medio litro, $V = 0,5 \text{ L} = V_1 + V_2$, queda

$$V_1 = m_1 / \rho = 2m_2 / \rho = 2V_2 \rightarrow 0,5 \text{ L} = V_1 + V_2 = 2V_2 + V_2 = 3V_2.$$

Es decir, deberemos mezclar 1/6 L del líquido del bote refrigerado (la mitad del bote porque era de 33 cL) con 1/3 L de la botella a temperatura ambiente.

b) En este caso, el equilibrio energético es

$$m_1 c_e \cdot (20 - T) = m_2 c_e \cdot (T - 5) \rightarrow V_1 \cdot (20 - T) = V_2 \cdot (T - 5),$$

donde T es la temperatura que buscamos (la más baja que podemos conseguir). Lógicamente, debemos tomar el bote refrigerado entero, pues así lograremos una mezcla lo más fría posible; es decir,

$$V_2 = 1/3 \text{ cL},$$

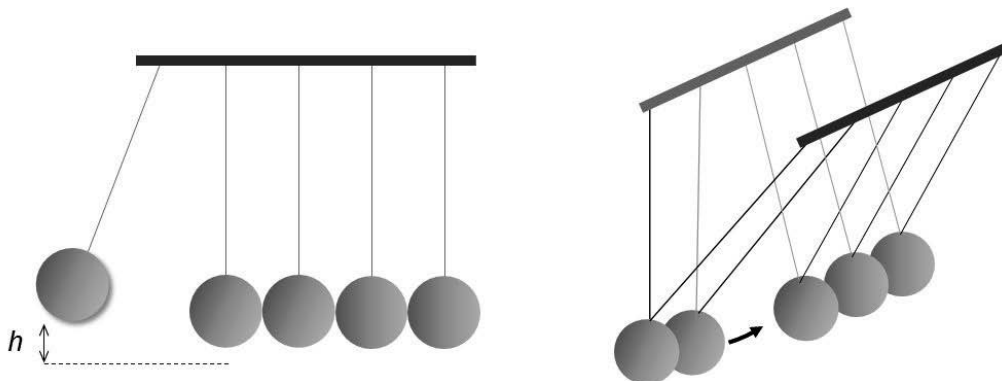
$$V_1 = 0,5 - V_2 = 1/6 \text{ cL}.$$

Por tanto, la temperatura pedida es

$$1/6 \cdot (20 - T) = 1/3 \cdot (T - 5) \rightarrow T = 10 \text{ °C}.$$

11. La cuna de Newton

La *cuna de Newton*, o *péndulo de Newton*, es un artilugio que sirve para demostrar la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento. Está formado por varios péndulos idénticos (normalmente cinco) colocados de forma que las bolas quedan alineadas horizontalmente y en contacto entre ellas. Cada bola cuelga de dos hilos para que el movimiento de los péndulos ocurra en el plano vertical.



Consideramos que todas las bolas son de igual masa e indeformables, y que los choques son perfectamente elásticos. Consideramos una cuna de Newton de cinco bolas.

- Separamos la primera bola hasta una altura h respecto a las otras, y la soltamos. Describe lo que ocurre y explícalo con lenguaje y argumentos físicos.
- Ahora separamos dos bolas, en vez de una, y las soltamos juntas. Explica de nuevo lo que ocurre. ¿Y si soltamos tres, y cuatro?

Resolución

a) La bola que elevamos tiene energía potencial mgh (si tomamos el origen de energía en la posición de las otras bolas). Al caer adquirirá una velocidad, justo antes de tocar a la segunda bola, igual a

$$mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 \rightarrow v_1 = \sqrt{2gh}.$$

Supongamos de momento que sólo existe la segunda bola. Aplicando la conservación del momento lineal y de la energía, podemos obtener las velocidades, v'_1 y v'_2 , de las dos bolas tras el choque, sabiendo que $v_2 = 0$:

$$\begin{cases} mv_1 + 0 = mv'_1 + mv'_2 \\ \frac{1}{2}mv_1^2 + 0 = \frac{1}{2}mv'^2_1 + \frac{1}{2}mv'^2_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v'_1 = 0 \\ v'_2 = v_1 \end{cases}.$$

Es decir, la primera bola queda en reposo y la segunda bola sale disparada con la velocidad que llevaba la primera*.

Ahora tenemos en cuenta que hay una tercera bola, y una cuarta, etc. Admitiendo, como dice el enunciado, que las masas son indeformables, la energía cinética de la primera bola se propaga por las bolas intermedias (como si todas ellas formaran un sólido indeformable) hasta llegar a la última bola, que es la que sale despedida con velocidad $\sqrt{2gh}$. Esta última bola alcanzará, por tanto, una altura h y después el proceso se repetirá en sentido inverso.

b) Si soltamos dos bolas juntas, ocurrirá algo similar a lo explicado anteriormente, pero en este caso serán las dos últimas bolas las que salgan despedidas quedando todas las otras tres en reposo.

Si soltamos tres bolas, saldrán despedidas tres bolas y quedarán dos en reposo. Es decir, de las tres bolas que caen dos de ellas se quedan en reposo pero la otra se une a las dos que estaban quietas saliendo las tres despedidas.

Si soltamos cuatro bolas, saldrán despedidas cuatro bolas y quedará siempre una en reposo.

Saber más

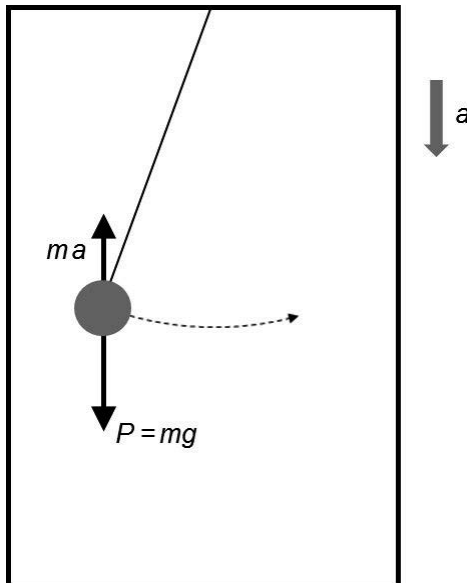
El primer físico que realizó experimentos con la cuna de Newton fue Edme Mariotte hacia el año 1670, aunque el artilugio se hizo popular por Newton, que lo describió en su libro *Principia Mathematica*. Véase el artículo:

Cross, R. (2012). "Edme Mariotte and Newton's Cradle". *The Physics Teacher* 50, pp. 206-207 (DOI: 10.1119/1.3694067).

* El fenómeno ocurre como hemos descrito únicamente en el caso en que las bolas fueran totalmente indeformables. En la realidad, los cuerpos (aunque se trate de bolas de acero) se deforman ligeramente cuando chocan con otro cuerpo. Cada bola deformada por el choque de la bola vecina se comporta como un muelle comprimido que transmite su energía potencial elástica a la siguiente bola (el siguiente muelle). Es decir, la sucesión de bolas es como una sucesión de muelles. De esta manera, la situación es mucho más compleja de como la hemos descrito. Si se plantean todas las ecuaciones que entran en juego y se resuelven matemáticamente, el resultado es que la penúltima bola no queda en reposo, sino que también sale despedida (aunque mucho más lenta que la última bola), y la primera bola tampoco queda en reposo sino que sale rebotada ligeramente hacia atrás (muy poco, y es casi imperceptible).

12. Un péndulo en mi ascensor

Colgamos un hilo de longitud L en el techo de la cabina de un ascensor. En el extremo del hilo colocamos una bolita de masa m y la hacemos oscilar de forma armónica. Determina la expresión del período del péndulo si el ascensor sube o baja con una aceleración a .



Resolución

En condiciones normales, con el ascensor parado, el período de oscilación armónica de un péndulo es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Cuando el ascensor sube con aceleración a consideraremos, además de la fuerza peso, una fuerza ficticia en la dirección contraria al movimiento (es decir, hacia abajo), de forma que la resultante es $m(g + a)$. El período del péndulo resulta entonces

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g + a}}.$$

Si el ascensor bajara en lugar de subir, el período sería

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g - a}}.$$

En caída libre, $a = g$ y, por tanto, no hay oscilación.

13. El Endeavour regresa con éxito

El trasbordador espacial Endeavour aterrizó en el Centro Espacial Kennedy después de permanecer 13 días, 18 horas y 8 minutos en el espacio durante su misión STS-130, en febrero de 2010, cuyo objetivo fue la instalación de dos nuevos módulos en la Estación Espacial Internacional. La Estación estuvo orbitando a 350 km de altura desde la superficie terrestre. La masa del Endeavour antes del lanzamiento era de 2051 127 kg, y su masa mientras estuvo en órbita de 121 320 kg.

Calcula las siguientes cantidades:

- a) El valor de la gravedad en el Endeavour mientras estuvo acoplado a la Estación Espacial.
- b) El período de las órbitas alrededor de la Tierra.
- c) El número de vueltas en total que ha dado a la Tierra durante la misión.
- d) La velocidad lineal en la órbita.
- e) La energía necesaria para lanzarlo y ponerlo en órbita.

Datos: masa y radio de la Tierra = $5,97 \times 10^{24}$ kg y 6371 km, $G = 6,67 \times 10^{-11}$ N·m²/kg².



Imágenes: NASA Image and Video Library (<https://images.nasa.gov/>)

Resolución

- a) El trasbordador y la Estación Espacial se encuentran en órbita a una distancia $r = R_T + h = 6371 + 350 = 6721$ km, medida desde el centro de la Tierra.

La gravedad terrestre a esa distancia es

$$g = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2} = 8,82 \text{ m/s}^2.$$

- b) El período orbital se calcula a partir de la 3ª Ley de Kepler:

$$T^2 = (2\pi / GM_T) \cdot r^3 = 5486,3 \text{ s} = 91,4 \text{ min}.$$

(Vemos que la Estación Espacial Internacional tarda aproximadamente una hora y media en completar una vuelta alrededor de la Tierra).

- c) La misión duró $13 \cdot 24 \cdot 60 + 18 \cdot 60 + 8 = 19\,808$ min. El número de vueltas es

$$19\,808 \text{ min} / 91,4 \text{ min} = 216,7 \text{ vueltas}.$$

d) La velocidad en una órbita es

$$v^2 = \frac{GM_T}{r} \rightarrow v = 7697,2 \text{ m/s} = 27710 \text{ km/h}.$$

e) Cuando el trasbordador está en reposo en la Tierra su energía es sólo potencial. Cuando está en órbita su energía total es la suma de la cinética y la potencial:

$$E_{\text{tierra}} = -\frac{GM_T}{R_T} m_{\text{tierra}} = -1,28 \times 10^{14} \text{ J},$$

$$E_{\text{órbita}} = -\frac{1}{2} \frac{GM_T}{r} m_{\text{órbita}} = -3,59 \times 10^{12} \text{ J}.$$

donde m_{tierra} y $m_{\text{órbita}}$ son las masas del Endeavour antes del lanzamiento (en tierra) y una vez puesto en órbita, respectivamente.

Por tanto, la energía que hay que suministrar es

$$E_{\text{tierra}} + \Delta E = E_{\text{órbita}} \rightarrow \Delta E = 1,24 \times 10^{14} \text{ J}.$$

Saber más

<http://www.estacionespacial.com/>.

<https://www.nasa.gov/>.

<http://en.wikipedia.org/wiki/STS-130>.

Los transbordadores espaciales, o lanzaderas, se han utilizado para reparar módulos de la Estación Espacial Internacional y para realizar misiones de mantenimiento como, por ejemplo, en el Telescopio espacial Hubble. Además del Endeavour, la NASA ha tenido otros cuatro transbordadores: Columbia, Challenger, Discovery y Atlantis. Pero en 2011 la NASA retiró su flota de transbordadores y puso fin a estos programas espaciales. Actualmente, las misiones a la Estación Espacial se realizan utilizando las lanzaderas rusas Soyuz y Progress.

14. Fuerzas dentro del núcleo atómico

La interacción entre dos nucleones (protones y/o neutrones del núcleo) puede describirse mediante el llamado *potencial de Yukawa*:

$$E_p(r) = -\frac{hc}{2\pi} \frac{e^{-(r/r_0)}}{r},$$

donde h es la constante de Planck, c la velocidad de la luz, r_0 una constante, y r es la distancia entre los nucleones.

a) Obtén la expresión de la fuerza que actúa entre dos nucleones en función de r .

Consideramos dos protones del núcleo separados una distancia de 1 fm.

b) Calcula la fuerza de repulsión coulombiana entre los protones.

c) ¿Cuántas veces mayor es la fuerza nuclear que la fuerza electrostática entre dichos protones? Utiliza el valor $r_0 = 1,5$ fm.

En realidad, la interacción entre los protones se modela añadiendo a la energía potencial un segundo término de tipo Yukawa, pero repulsivo (para dar cuenta de que los nucleones no pueden estar infinitamente juntos). La función completa es

$$E_p(r) \approx -\frac{hc}{2\pi} \left[\frac{e^{-(r/r_1)}}{r} - \frac{e^{-(r/r_2)}}{r} \right],$$

siendo $r_1 = 1,5$ fm y $r_2 = 0,3$ fm.

d) Representa gráficamente la función anterior e identifica el mínimo.

La siguiente fórmula permite calcular el radio del núcleo atómico en función del número de nucleones A (protones más neutrones):

$$R = R_0 A^{1/3}, \text{ con } R_0 = 1,2 \text{ fm}.$$

e) Cuál es la densidad de la materia en el núcleo.

f) Sea un núcleo de He (2 protones y 2 neutrones). Calcula su radio.

Datos: (fermi o femtómetro) $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$, $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, carga del protón $|e| = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, $K = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{C}^{-2}$, masa de protón y neutrón $= 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

Resolución

a) La fuerza es el gradiente negativo de la energía potencial:

$$F = -\frac{dE_p}{dr}.$$

Si derivamos la función de Yukawa resulta

$$F(r) = -\frac{hc}{2\pi} \frac{e^{-(r/r_0)}}{r^2} \left(1 + \frac{r}{r_0} \right).$$

Como vemos, la fuerza es atractiva. Además se trata de una fuerza central y, por tanto, conservativa.

b) La fuerza de Coulomb entre los dos protones vale

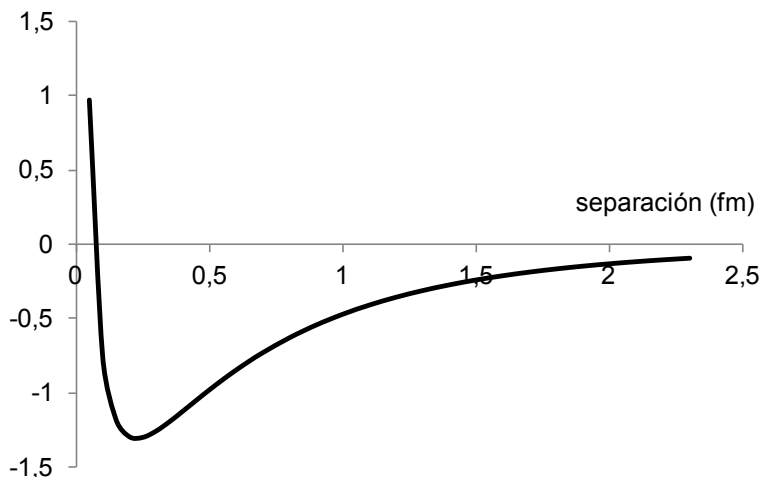
$$F_C = K \frac{e^2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{(1 \cdot 10^{-15})^2} = 230,4 \text{ N}.$$

c) Calculamos la fuerza resultante del potencial de Yukawa cuando $r = 1 \text{ fm}$:

$$F_N = -\frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2\pi} \frac{e^{-(1/1,5)}}{(1 \cdot 10^{-15})^2} \left(1 + \frac{1}{1,5}\right) = -27,1 \times 10^3 \text{ N}.$$

Esta fuerza nuclear (atractiva) es del orden de 100 veces mayor que la fuerza de electrostática (repulsiva).

d) La curva de energía potencial que se pide es la siguiente. El eje Y es energía potencial en unidades arbitrarias. Se observa que la energía tiene un mínimo. A la izquierda del mínimo la fuerza es repulsiva (pues la pendiente de la energía potencial es negativa). A la derecha del mínimo la fuerza es atractiva.



e) Si tenemos A nucleones de masa m , la masa total es $M = Am$, y la densidad es

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{M}{V} = \frac{Am}{(4/3)\pi R^3} = \frac{Am}{(4/3)\pi (R_0 A^{1/3})^3} = \frac{3m}{4\pi R_0^3} = \frac{3 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}}{4\pi (1,2 \cdot 10^{-15})^3} = \\ &= 2,3 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3, \end{aligned}$$

es decir, 30 órdenes de magnitud menor que la densidad de la materia ordinaria (que es del orden de 1000 kg/m^3).

f) El radio del núcleo de He, con $A = 4$, es

$$R = 1,2 \cdot 10^{-15} \cdot 4^{1/3} = 1,9 \times 10^{-15} \text{ m} = 1,2 \text{ fm}.$$

15. Piscina térmica

Una piscina mide $10\text{ m} \times 5\text{ m}$ de superficie y 2 m de altura. Está llena de agua hasta la mitad. La temperatura del agua es de $20\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Comienza a llover torrencialmente y caen 10 litros/m^2 de agua a $10\text{ }^{\circ}\text{C}$.

a) Calcula cuánto vale la temperatura final del agua de la piscina tras la lluvia.

Deja de llover y el agua empieza a calentarse con la luz solar durante 5 horas. Suponemos que los rayos de sol inciden perpendicularmente y que la irradiación solar es de 1000 W/m^2 .

b) Calcula la temperatura de la piscina tras “tomar el sol”. ¿Depende el resultado de la superficie de la piscina?

Datos: calor específico del agua = $4,187\text{ J/(g}^{\circ}\text{C)}$; densidad del agua = 1000 kg/m^3 .

Resolución

a) El volumen de la piscina es $V = 10 \times 5 \times 2 = 100\text{ m}^3$, pero sólo la mitad contiene agua, es decir, $50\text{ m}^3 = 50\,000$ litros. Durante la lluvia caen dentro de la piscina $10\text{ litros/m}^2 \times (10\text{ m} \times 5\text{ m}) = 500$ litros. Planteamos la conservación de la energía: el calor ganado por el agua de lluvia (que está más fría) es igual al calor cedido por el agua de la piscina:

$$m c_e (T - 10) = M c_e (20 - T) \rightarrow 500 \cdot (T - 10) = 50\,000 \cdot (20 - T).$$

Se divide a ambos lados por el calor específico y se divide por la densidad del agua para pasar a volúmenes. El resultado es $T = 19,9\text{ }^{\circ}\text{C}$.

b) Calculamos la energía recibida en 5 horas en la superficie de la piscina de 50 m^2 , sabiendo que la intensidad de la radiación es 1000 W/m^2 :

$$I = \frac{P}{S} = \frac{E/t}{S} \rightarrow E = I S t = 1000 \cdot 50 \cdot 5 \cdot 3600 = 9 \times 10^8\text{ J}.$$

A partir del volumen de agua de la piscina, la masa de agua que se calienta es

$$m = \rho V = 1000 \cdot 50 = 5 \times 10^4\text{ kg}.$$

Igualamos la energía recibida y el calor:

$$E = m c_e (T - 19,9) \rightarrow 9 \cdot 10^8 = 5 \cdot 10^4 \cdot 4187 \cdot (T - 19,9).$$

Despejamos la temperatura final:

$$T = 4,3 + 19,9 = 24,2\text{ }^{\circ}\text{C}.$$

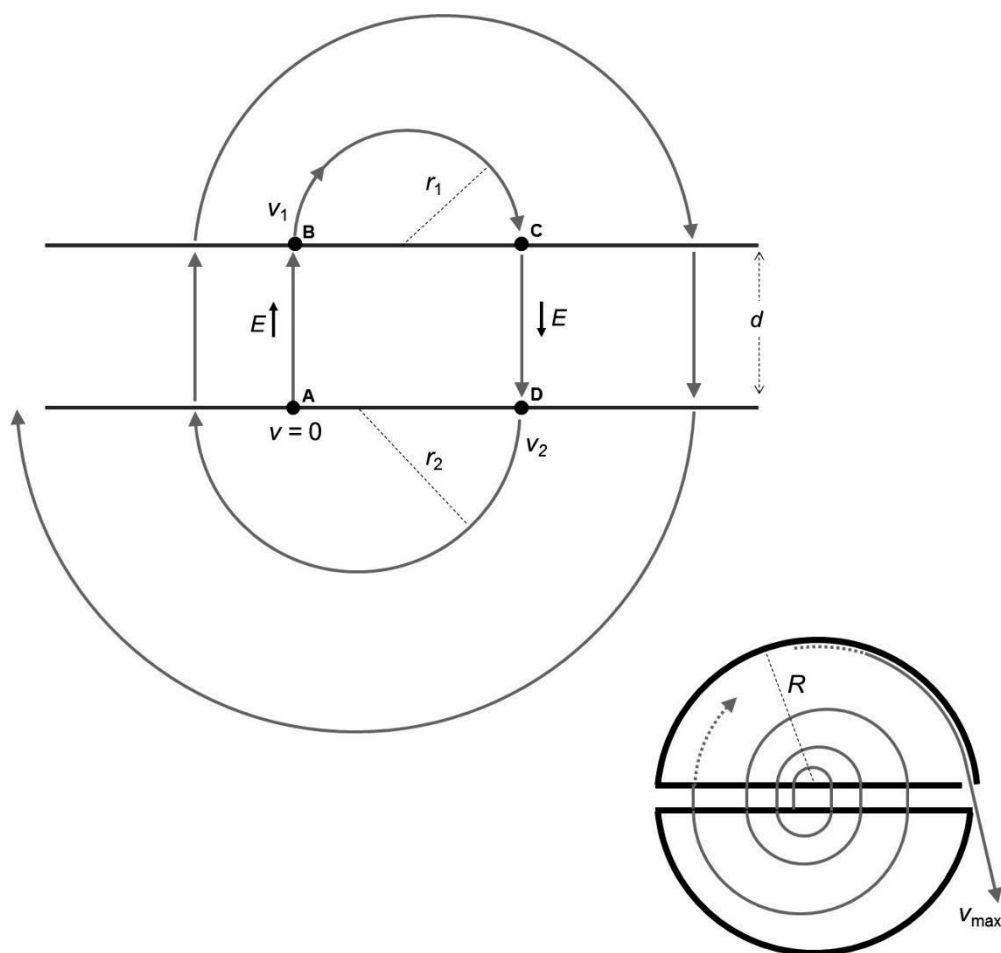
El resultado no depende de la superficie de la piscina, pues a mayor superficie mayor energía solar se recibe, pero más cantidad de agua hay que calentar:

$$E = Q \rightarrow I S t = m c_e \Delta T = (\rho S h) c_e \Delta T \rightarrow I t = \rho h c_e \Delta T.$$

16. El ciclotrón

El ciclotrón de la figura está formado por dos placas semicirculares huecas, de radio R , en cuyo interior se ha hecho el vacío y donde existe un campo magnético B normal a las placas. Entre los lados rectos de las placas, separados una distancia d , se aplica una diferencia de potencial de valor V_0 y polaridad variable que produce un campo eléctrico de sentido oscilante $\pm E$.

Una partícula de masa m y carga q parte del reposo desde el punto A y es acelerada por el campo eléctrico hasta una velocidad v_1 cuando llega al punto B. En ese momento interviene el campo magnético y la partícula describe una trayectoria semicircular de radio r_1 dentro de la primera placa. Cuando la partícula llega al punto C el campo eléctrico ha invertido su sentido, de manera que se produce un segundo aumento de velocidad hasta v_2 en el punto D. En la segunda placa la partícula recorre otro semicírculo, de radio r_2 mayor que el primero. El ciclo se repite: la partícula gana velocidad cada vez que pasa por la zona intermedia y describe en conjunto una trayectoria espiral hasta que finalmente sale por el extremo de la placa con una velocidad $v_{\max}$.



Determina, en función de V_0 , B , R , m , q y d , las siguientes cantidades:

- a) El incremento de energía cinética que experimenta la partícula cada vez que atraviesa la zona intermedia.
- b) La aceleración de la partícula en la zona intermedia.
- c) La velocidad v_n que lleva la partícula tras atravesar n veces la zona intermedia.
- d) El radio de la n -ésima trayectoria semicircular.
- e) El período de revolución de la partícula en su trayectoria espiral. (Demuestra primero que el tiempo que emplea en cada semicircunferencia es siempre el mismo, independientemente de la velocidad; considera despreciable el tiempo empleado en pasar de una placa a otra; el dibujo no está a escala, la distancia d es muy pequeña).
- f) La velocidad máxima a la salida del ciclotrón.
- g) Demuestra que el número de vueltas completas que da la partícula desde que inicia su movimiento hasta que sale viene dado por la expresión

$$N = \frac{q R^2 B^2}{4mV_0} .$$

- h) Si la partícula es un protón (masa = $1,67 \times 10^{-27}$ kg, carga = $1,6 \times 10^{-19}$ C), el campo magnético es de 0,34 T, el voltaje aplicado de 10 000 V y el radio del ciclotrón es de 50 cm, ¿cuántas vueltas da el protón hasta que sale?

Resolución

- a) El incremento de energía cinética cada vez que la partícula atraviesa la zona intermedia es

$$\Delta E_c = \Delta E_p = qV_0 .$$

- b) La aceleración de la partícula en la zona intermedia se obtiene teniendo en cuenta la fuerza eléctrica en el interior de las placas:

$$F = qE = q \frac{V_0}{d} = ma \rightarrow a = \frac{qV_0}{md} .$$

- c) La velocidad v_n que lleva la partícula tras atravesar n veces la zona intermedia se calcula por inducción sabiendo que en cada travesía la energía cinética aumenta una cantidad qV_0 :

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = qV_0 ,$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + qV_0 = 2qV_0 ,$$

$$\frac{1}{2}mv_n^2 = \frac{1}{2}mv_{n-1}^2 + qV_0 = n qV_0 .$$

$$v_n = \sqrt{2n \frac{qV_0}{m}} .$$

d) El radio de la n -ésima trayectoria semicircular lo obtenemos a partir de la fuerza de Lorentz y de la velocidad obtenida anteriormente:

$$F = qvB = m \frac{v^2}{r} \rightarrow r_n = \frac{mv_n}{qB} = \sqrt{2n \frac{mV_0}{qB^2}}.$$

e) El tiempo que emplea la partícula en recorrer cada semicircunferencia es

$$t = \frac{\pi r_n}{v_n} = \pi \frac{m}{qB},$$

que es siempre el mismo (hemos despreciado el tiempo empleado en pasar de una placa a otra, pues d es muy pequeño).

Entonces, el período de revolución de la partícula en su trayectoria espiral es el doble del tiempo anterior:

$$T = 2\pi \frac{m}{qB}.$$

f) La velocidad máxima a la salida del ciclotrón será la que resulte de considerar la fuerza de Lorentz para una trayectoria de radio R :

$$v_{\max} = \frac{qRB}{m}.$$

g) Igualamos la velocidad máxima de la partícula en la última vuelta con la velocidad que lleva cuando atraviesa por n -ésima vez la zona intermedia (según el apartado c):

$$v_n = \sqrt{2n \frac{qV_0}{m}} \equiv v_{\max} = \frac{qRB}{m} \rightarrow n = \frac{qR^2B^2}{2mV_0}.$$

Como en cada vuelta atraviesa dos veces la zona intermedia, el número N total de vueltas será la mitad:

$$N = \frac{qR^2B^2}{4mV_0}.$$

h) Utilizando los datos que da el enunciado para un protón y la expresión anterior, las vueltas da el protón hasta que sale son

$$N = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot (0,5)^2 \cdot (0,34)^2}{4 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 10^4} = 69 \text{ vueltas}.$$

Saber más

El ciclotrón es un acelerador de partículas que no necesita emplear grandes voltajes, gracias a las múltiples aceleraciones en las sucesivas vueltas.

Una de las aplicaciones de los ciclotrones es en medicina, donde se utilizan para la producción de radiofármacos.

17. Yo mido la gravedad con un chorro de agua

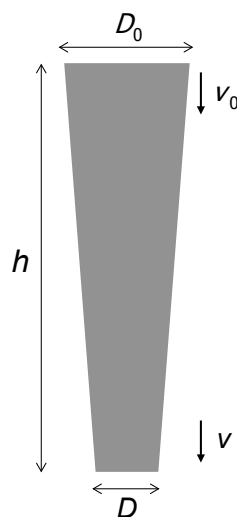
a) Demuestra que la velocidad del agua v_0 a la salida de un grifo y la velocidad v tras caer una altura h se relacionan mediante la expresión $v^2 - v_0^2 = 2gh$.

El chorro de agua se estrecha conforme cae y adquiere forma troncocónica. El diámetro del chorro a la salida del grifo es D_0 y el diámetro tras la caída es D . Por conservación de la masa, el caudal C (volumen por unidad de tiempo) es el mismo arriba y abajo.

b) Demuestra que $C = \frac{\pi D^2 v}{4} = \frac{\pi D_0^2 v_0}{4}$.

c) Demuestra que la gravedad puede calcularse como

$$g = \frac{8C^2}{\pi^2 h} \left(\frac{1}{D^4} - \frac{1}{D_0^4} \right).$$



Tomamos varias medidas experimentales abriendo el grifo más o menos para tener distintos caudales. En cada caso medimos con una regla los diámetros del chorro (a la salida del grifo y tras la caída) y la altura de la caída, y medimos el volumen de agua recogido en un recipiente y con un cronómetro el tiempo de recogida de agua. Todas las medidas experimentales se dan en la tabla.

Grifo	D_0 (mm)	D (mm)	h (cm)	V (mL)	t (s)
caso 1	3	1,5	12	80	41,0
caso 2	5	2,0	20	100	15,0
caso 3	7	3,5	12	150	11,0
caso 4	10	5,0	19	200	4,7

d) Calcula los cuatro caudales, en litros/hora.

e) Calcula el valor de g con las medidas tomadas. Calcula el valor medio.

f) ¿Qué medida es más inexacta? Recalcula el valor medio de g eliminando dicha medida.

g) ¿Qué magnitud crees que influye más en el error cometido al determinar g con este procedimiento?

h) ¿Cuánto vale el diámetro de un chorro que sale por una tubería de 10 cm de diámetro con un caudal de 1 litro/s, después de caer desde 10 metros de altura?

Resolución

a) La demostración es trivial teniendo en cuenta las ecuaciones cinemáticas de la caída libre:

$$\begin{cases} v = v_0 + gt \\ h = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \rightarrow v^2 - v_0^2 = 2gh.$$

b) El volumen de agua contenido en un elemento (cilíndrico) infinitesimal del chorro, de altura $v_0 dt$, es $dV = \pi (D_0 / 2)^2 (v_0 dt)$ en la parte superior del chorro, y $dV = \pi (D / 2)^2 (v dt)$ en la parte inferior del chorro. Entonces el caudal es

$$C = \frac{dV}{dt} = \frac{\pi D^2 v}{4} = \frac{\pi D_0^2 v_0}{4}.$$

c) La expresión para calcular la gravedad dada en el enunciado se obtiene al elevar al cuadrado las velocidades del apartado b (en función del caudal) y llevarlas a la expresión cinemática del apartado a.

$$v^2 - v_0^2 = 2gh \rightarrow \left(\frac{4C}{\pi D_0^2} \right)^2 - \left(\frac{4C}{\pi D^2} \right)^2 = 2gh \rightarrow g = \frac{8C^2}{\pi^2 h} \left(\frac{1}{D^4} - \frac{1}{D_0^4} \right).$$

d) — e) El caudal y la gravedad calculados se indican en la siguiente tabla:

Caudal (L/h)	Gravedad (m/s ²)
7	4,76
24	10,97
49	7,85
153	11,59

El valor medio de la gravedad a partir de los cuatro valores resulta

$$\bar{g} = 8,8 \pm 1,6 \text{ m/s}^2.$$

Hemos asignado como error la desviación estándar de la media, es decir, la desviación estándar de las cuatro medidas dividida por la raíz del número de medidas: $\sigma_g / \sqrt{n}$, con $n = 4$.

f) La primera medida tiene claramente más error que las demás. Tiene sentido ya que el chorro del primer grifo es muy estrecho y el error relativo en la medida de diámetros debe ser mayor.

Descartando la primera medida, el valor de la gravedad es ahora

$$\bar{g} = 10,1 \pm 1,1 \text{ m/s}^2.$$

g) Si hacemos propagación de errores en la expresión que permite determinar la gravedad, encontramos que el error en el diámetro es el que influye más.

h) Despejamos D de la expresión del apartado c y se obtiene

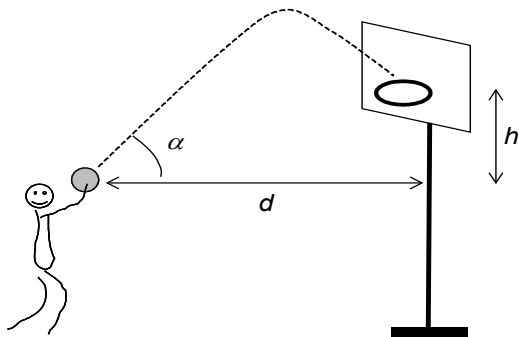
$$D = 9,5 \text{ mm}.$$

18. Tiro de tres

Vamos a describir los tiros a canasta mediante la cinemática del tiro parabólico. Despreciaremos la resistencia con el aire.

Situamos el origen de coordenadas en la pelota antes de lanzarla. Llamamos d a la distancia de la pelota a la canasta y h a diferencia de altura entre la canasta y la pelota. De esta manera, la canasta está en el punto (d, h) .

Sea v_0 la velocidad de lanzamiento de la pelota y α el ángulo medido desde la horizontal.



a) Demuestra que la ecuación de la trayectoria que sigue la pelota es

$$y = (\tan \alpha) x - \frac{g}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) x^2.$$

b) Despeja el ángulo de la ecuación anterior e indica de manera razonada cuál de las dos soluciones es "legal" según la normativa del baloncesto.

c) Demuestra que la velocidad mínima de lanzamiento, para poder llegar a canasta con algún ángulo, viene dada por la expresión

$$v_{\min}^2 = g \left(h + \sqrt{h^2 + d^2} \right).$$

d) Si el jugador salta de forma que la pelota está al mismo nivel que la canasta en el momento de lanzar ($h = 0$), ¿cuál de ser el ángulo de lanzamiento para hacer el esfuerzo mínimo?

e) Un jugador hace un tiro desde la línea de tres puntos, situada a 6,25 m de la canasta. Cuando lanza, sostiene la pelota a una altura que queda 1 m por debajo del nivel de la canasta. Obtén la velocidad mínima que puede imprimir al lanzamiento para llegar al aro y el ángulo con el que debe lanzar.

f) Para el caso anterior, utiliza el principio de conservación de la energía y calcula la velocidad de la pelota cuando llega a la canasta.

Resolución

La pelota parte del punto $(0, 0)$ y ha de alcanzar el punto (d, h) , con lo cual la trayectoria vendrá dada por las ecuaciones del tipo parabólico:

$$\begin{aligned} x &= (v_0 \cos \alpha) t \\ y &= (v_0 \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

Una vez tenemos el planteamiento inicial hecho, empezamos el ejercicio.

a) De la primera ecuación obtenemos $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$, con lo cual, sustituyendo en la segunda ecuación, nos queda

$$y = v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = x \tan \alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} x^2 (1 + \tan^2 \alpha).$$

b) Hacemos los cambios de variable $A = \tan(\alpha)$ y $b = \frac{g}{2v_0^2}$, de forma que la ecuación del apartado anterior queda de la forma

$$y = Ax - b(1 + A^2)x^2 = Ax - bx^2 - bA^2x^2.$$

Como nuestro objetivo es despejar A , escribimos la anterior ecuación como $A^2 - \frac{1}{bx}A + \left(1 + \frac{y}{x^2b}\right) = 0$, cuya solución es

$$A = \frac{\frac{1}{xb} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{bx}\right)^2 - 4\left(1 + \frac{y}{x^2b}\right)}}{2} = \frac{v_0^2}{gx} \pm \sqrt{\frac{v_0^4}{g^2x^2} - \left(1 + \frac{2v_0^2y}{gx^2}\right)}.$$

Deshaciendo el cambio $A = \tan \alpha$, y sabiendo que al llegar a canasta $(x, y) = (d, h)$ obtenemos

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{gd} \pm \sqrt{\frac{v_0^4}{g^2d^2} - \left(1 + \frac{2hv_0^2}{gd^2}\right)}.$$

De las dos soluciones sólo una es legal. Como la pelota no puede entrar por debajo, la solución es la correspondiente al mayor ángulo, es decir, el que posee el signo positivo:

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{gd} + \sqrt{\frac{v_0^4}{g^2d^2} - \left(1 + \frac{2hv_0^2}{gd^2}\right)}.$$

c) Para que haya solución física (real), el contenido de la raíz cuadrada debe ser positivo:

$$\frac{v_0^4}{g^2d^2} - \left(1 + \frac{2hv_0^2}{gd^2}\right) \geq 0.$$

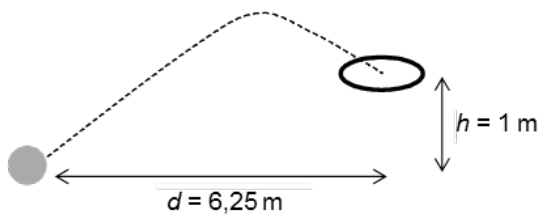
La velocidad inicial mínima posible resulta

$$\frac{v_0^4}{g^2d^2} = 1 + \frac{2hv_0^2}{gd^2} \rightarrow v_0^4 - 2hgv_0^2 - g^2d^2 = 0 \rightarrow v_0^2 = g \left(h + \sqrt{h^2 + d^2} \right).$$

d) Si $h = 0$ tenemos que $v_0^2 = gd$, con lo cual: $\tan \alpha = 1 \rightarrow \alpha = 45^\circ$.

e) Con los datos del enunciado podemos hacer un sencillo diagrama que nos ayude en la resolución del ejercicio.

Sustituyendo los datos que nos proporciona el enunciado en la ecuación obtenida en el apartado c, obtenemos



$$v_0^2 = g \left(1 + \sqrt{1^2 + 6,25^2} \right) = 71,83 \text{ (m/s)}^2.$$

Con lo cual resulta una velocidad inicial mínima: $v_0 = 8,47 \text{ m/s}$.

Para obtener el ángulo con el que el jugador debe lanzar la pelota, tenemos en cuenta la velocidad mínima ya obtenida, y despejamos de $\tan \alpha = \frac{v_0^2}{gd}$ obteniendo

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{gd} = \frac{h}{d} + \sqrt{1 + \frac{h^2}{d^2}} = \frac{1}{d} \left(h + \sqrt{d^2 + h^2} \right) = \frac{1}{6,25} + \sqrt{1 + \frac{1}{6,25^2}}.$$

Y el ángulo pedido es

$$\alpha = 49,5^\circ.$$

f) Aplicando el principio de conservación de la energía es fácil despejar la velocidad final de la pelota:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh + \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v^2 = v_0^2 - 2gh.$$

Sustituimos los valores obtenidos anteriormente:

$$\frac{1}{2}8,47^2 = 9,8 \cdot 1 + \frac{1}{2}v^2,$$

de donde, despejando, obtenemos

$$v^2 = 8,47^2 - 2 \cdot 9,8 \cdot 1 \rightarrow v = 7,22 \text{ m/s}.$$

Saber más

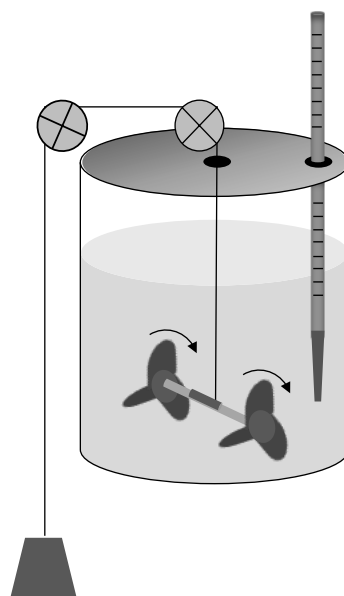
Hay todavía mucha más física en el baloncesto: la rotación y efecto del balón, el salto de los jugadores, el rebote en el tablero, la forma de la pelota...

19. El equivalente mecánico del calor

El experimento de Joule demostró que la energía mecánica podía transformarse íntegramente en calor. Un recipiente aislado térmicamente contiene una masa de agua, con un termómetro para medir su temperatura, y un eje con unas paletas que se ponen en movimiento por la acción de una pesa. La pesa cae y pierde energía potencial. Como consecuencia, el agua agitada por las paletas se calienta.

Realizamos el experimento con una masa de agua de 100 g inicialmente a 20 °C. Utilizamos una pesa de 50 kg. Medimos la temperatura que va alcanzando el agua a medida que la pesa descende distintas alturas:

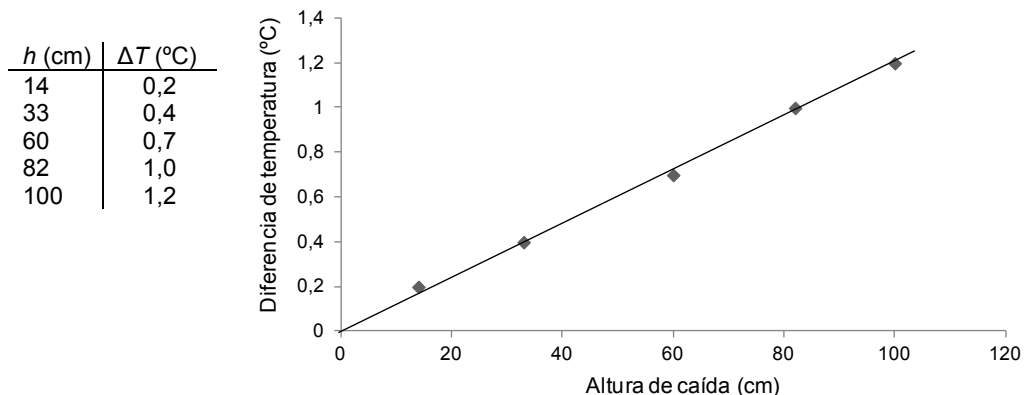
Altura (cm)	T (°C)
14	20,2
33	20,4
60	20,7
82	21,0
100	21,2



- Representa en una gráfica el incremento de temperatura en función de la altura. Ajusta los puntos a una recta. Obtén su pendiente.
- Con la pendiente anterior calcula la relación entre la unidad de energía (julio) y la unidad de calor (caloría), sabiendo que el calor específico del agua es 1 cal/(g °C). ¿Qué error experimental hemos cometido (valor exacto: 1 cal = 4,187 J).
- Supón que sólo disponemos de una pesa de 1 kg y de una altura para dejar caer la pesa de 1 m. Pero queremos aumentar 1 °C la temperatura de la masa anterior de agua (100 g), ¿Cómo harías el experimento?

Resolución

- Hacemos la tabla y la gráfica con los valores dados y el incremento de temperatura respecto al valor inicial (20 °C) dependiendo de la altura:



Hemos ajustado los puntos a una recta $y = px$, donde y es el incremento de temperatura en grados Celsius, x es la altura y p es la pendiente. De la recta experimental obtenemos una pendiente $p \approx 0,012 \text{ } ^\circ\text{C/cm}$.

b) Para obtener la equivalencia energética basta con tener en cuenta que

$$E_p = Mgh = mC\Delta T \rightarrow \Delta T = \frac{Mg}{mC}h \rightarrow y = ph.$$

Tenemos las masas del agua y de la pesa ($m = 100 \text{ g}$, $M = 50 \text{ kg}$). Igualando:

$$p = \frac{Mg}{mC} \rightarrow C = \frac{Mg}{pm} = \frac{50 \cdot 9,8}{100 \cdot 0,012} = 4,083 \text{ J/g } ^\circ\text{C}.$$

Como el enunciado nos daba el dato del calor específico del agua, es fácil concluir que la equivalencia energética entre la unidad energética y la del calor es

$$1 \text{ cal} \approx 4,083 \text{ J}.$$

Como el valor exacto es $1 \text{ cal} = 4,187 \text{ J}$, nuestro error experimental es

$$(4,187 - 4,083) / 4,187 \times 100 = 2,5 \text{ } \%$$

c) Ahora tenemos una pesa de masa $M = 1 \text{ kg}$ y una altura máxima de trabajo de 1 m . La masa de agua sigue siendo $m = 100 \text{ g}$.

Volvemos a utilizar las fórmulas de la energía potencial, para obtener la altura a la que habría que lanzar la pesa para aumentar la temperatura $1 \text{ } ^\circ\text{C}$:

$$Mgh = mC\Delta T \rightarrow h = \frac{100 \text{ g} \times 1 \text{ cal/g } ^\circ\text{C} \times 1 \text{ } ^\circ\text{C}}{1 \text{ kg} \times 9,8 \text{ m/s}^2} = \frac{418,7 \text{ J}}{9,8 \text{ J/m}} = 42,72 \text{ m}.$$

Así, una posible solución al ejercicio sería tirar la pesa 42 veces desde esa altura, y luego tirarla una última vez desde una altura de 72 cm .

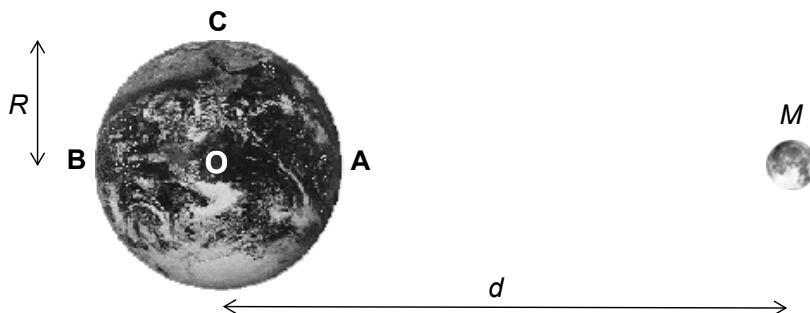
Saber más

La descripción del experimento de Joule para medir el equivalente mecánico del calor se encuentra en el artículo:

Joule, J.P. (1850). "On the Mechanical Equivalent of Heat". *Phil. Trans. Royal Society* 140, pp. 61-82.

20. Mareas lunares

El fenómeno de las mareas se debe a que el campo gravitatorio producido por la Luna, o por el Sol, sobre la Tierra no es homogéneo, ya que hay puntos más alejados que otros del astro que ejerce la fuerza.



Llamamos R al radio de la Tierra, d a la distancia de la Luna al centro de la Tierra, M a la masa de la Luna y m a la masa de un cuerpo cualquiera situado en la Tierra.

Consideramos que la Tierra es esférica y despreciamos la inclinación de su eje. Suponemos que no hay continentes y que toda la superficie terrestre está cubierta de una capa de agua.

Definición: La *fuerza de marea*, f_p , en un punto P de la superficie de la Tierra es igual a la diferencia entre la fuerza de atracción que ejerce la Luna sobre un objeto situado en dicho punto, F_p , y la fuerza de atracción sobre el objeto si estuviese en el centro de la Tierra, F_O . Es decir: $\vec{f}_p = \vec{F}_p - \vec{F}_O$.

Considera tres puntos A, B y C en la superficie de la Tierra y un punto O en su centro. Las fuerzas de marea, en módulo, en los puntos A, B y C son

$$f_A = f_B = 2f_C \approx 2 \frac{GMm}{d^3} R.$$

a) Demuestra la expresión anterior a partir de la definición de “fuerzas de marea”. Ayuda: toma $R \ll d$ para hacer las aproximaciones oportunas; la componente horizontal de f_C puede despreciarse.

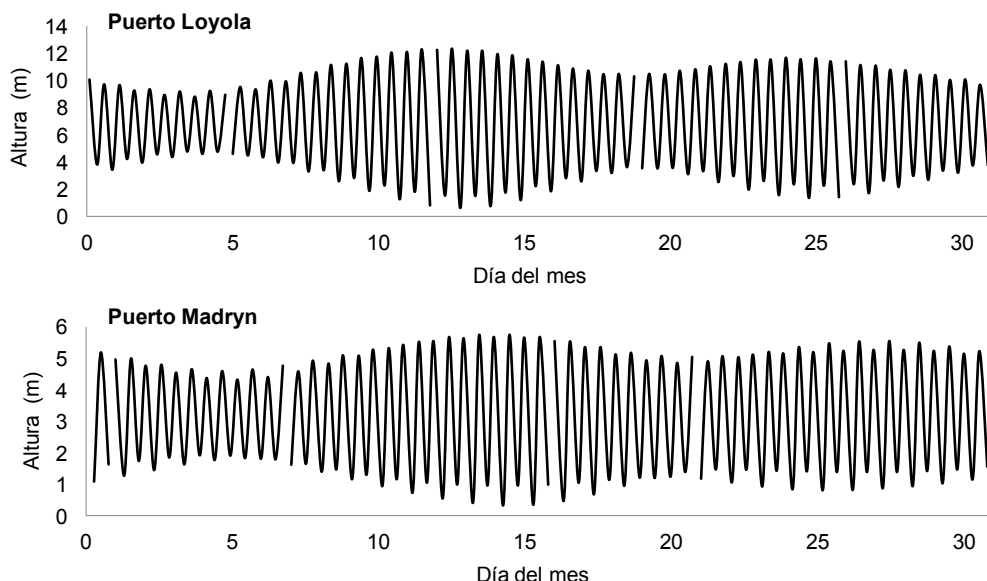
b) Escribe estas fuerzas de marea en forma vectorial.

c) Calcula sus valores numéricos para una masa de agua de 1 kg, teniendo en cuenta estos datos: radio de la Tierra = 6371 km, distancia Tierra-Luna = 384 400 km, masa de la Luna = $7,35 \times 10^{22}$ kg. Compara críticamente los resultados con el peso de la masa de agua.

d) Representa el aspecto que tiene el campo de fuerzas de marea sobre la superficie de la Tierra. (Representa flechitas a lo largo de la circunferencia terrestre indicando el sentido de la fuerza en cada punto).

e) Dibuja la forma que tiene la capa de agua sobre la superficie terrestre cuando la Luna está en la posición de la figura. Discute si la deformación del agua causada por las mareas puede tener algún efecto sobre la rotación de la Tierra.

f) Las siguientes gráficas representan la altura del agua en dos lugares costeros de Argentina. Describe la marea de Puerto Loyola mediante una función oscilatoria. Indica cuánto vale la amplitud (toma un valor medio aproximado) y el período.

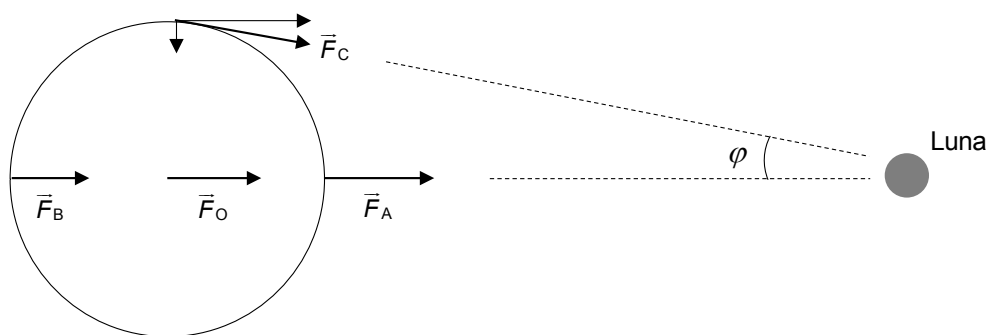


g) ¿Te sorprende el valor del período obtenido en el anterior apartado?, ¿por qué?

h) Considera una central de energía mareomotriz que aprovecha una laguna de 1 km^2 de superficie sujeta a mareas de 4 m de altura. Estima la potencia (en vatios) de esta central.

Resolución

Comenzamos haciendo un esquema con las fuerzas actuantes que nos ayudará en la resolución del problema:



a) y b) Como la resolución de ambos apartados es similar, las hacemos juntas.

Comenzamos definiendo la fuerza que ejerce la Luna sobre los puntos A, B, O y C:

$$\vec{F}_A = \frac{GMm}{(d-R)^2} \vec{i}, \quad \vec{F}_B = \frac{GMm}{(d+R)^2} \vec{i}, \quad \vec{F}_O = \frac{GMm}{d^2} \vec{i},$$

$$\vec{F}_C = \frac{GMm}{(\sqrt{d^2 + R^2})^2} (\cos \varphi \vec{i} - \sin \varphi \vec{j}),$$

donde $\cos \varphi = \frac{d}{\sqrt{d^2 + R^2}}$ y $\sin \varphi = \frac{R}{\sqrt{d^2 + R^2}}$, y M es la masa de la Luna y m la masa de agua.

Como $R \gg d$, tenemos: $\cos \varphi \approx 1$, $\sin \varphi \approx R/d$.

Sustituyendo en $\vec{F}_C$ nos queda

$$\vec{F}_C \approx \frac{GMm}{(d^2 + R^2)} \vec{i} - \frac{GMm}{(d^2 + R^2)} \frac{R}{d} \vec{j}.$$

Las fuerzas de marea quedan así:

$$\vec{f}_A = \vec{F}_A - \vec{F}_B = GMm \left[\frac{1}{(d-R)^2} - \frac{1}{d^2} \right] \vec{i} = GMm \left[\frac{d^2 - d^2 - R^2 + 2dR}{(d-R)^2 d^2} \right] \vec{i} \approx GMm \frac{2R}{d^3} \vec{i},$$

$$\vec{f}_B = \vec{F}_B - \vec{F}_O = GMm \left[\frac{1}{(d+R)^2} - \frac{1}{d^2} \right] \vec{i} = GMm \left[\frac{d^2 - d^2 - R^2 - 2dR}{(d+R)^2 d^2} \right] \vec{i} \approx -GMm \frac{2R}{d^3} \vec{i},$$

$$\vec{f}_C = \vec{F}_C - \vec{F}_O = GMm \left[\frac{1}{(d^2 + R^2)} - \frac{1}{d^2} \right] \vec{i} - \frac{GMm}{(d^2 + R^2)} \frac{R}{d} \vec{j} \approx -GMm \frac{R}{d^3} \vec{j},$$

donde se han hecho las siguientes aproximaciones:

$$R^2 \approx 0 \rightarrow (d-R)^2 d^2 \approx (d+R)^2 d^2 \approx d^4, \quad d^2 + R^2 \approx d^2, \quad \frac{1}{d^2 + R^2} - \frac{1}{d^2} \approx 0.$$

En resumen, los vectores para las fuerzas de marea son aproximadamente

$$\vec{f}_A \approx -\vec{f}_B = GMm \frac{2R}{d^3} \vec{i},$$

$$\vec{f}_C \approx -GMm \frac{R}{d^3} \vec{j}.$$

c) Con los datos del enunciado, con una masa de agua de 1 kg, sustituimos en las ecuaciones para el módulo de las fuerzas del ejercicio anterior:

$$f_A = f_B = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,35 \cdot 10^{22} \cdot 1 \cdot \frac{2 \cdot 6317 \cdot 10^3}{(384,4 \cdot 10^6)^3} = 1,09 \times 10^{-6} \text{ N},$$

$$f_C = 5,45 \times 10^{-7} \text{ N},$$

Por otro lado, calculamos el peso de 1 kg de agua:

$$\vec{P} = mg \vec{i} \rightarrow P = 1 \cdot 9,8 = 9,8 \text{ N}.$$

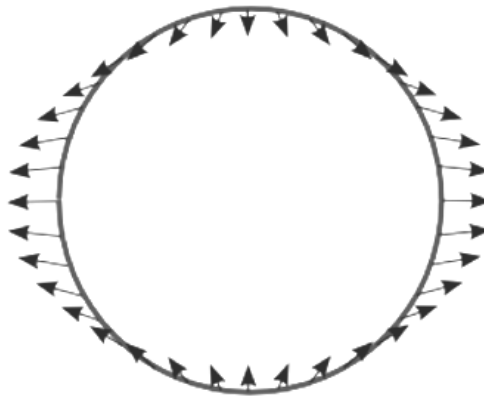
Por último, comparamos las fuerzas de marea con el peso del agua:

$$\frac{f_A}{P} = \frac{f_B}{P} = \frac{1,09 \cdot 10^{-6}}{9,8} = 1,12 \times 10^{-7},$$

$$\frac{f_C}{P} = \frac{5,45 \cdot 10^{-7}}{9,8} = 5,56 \times 10^{-8}.$$

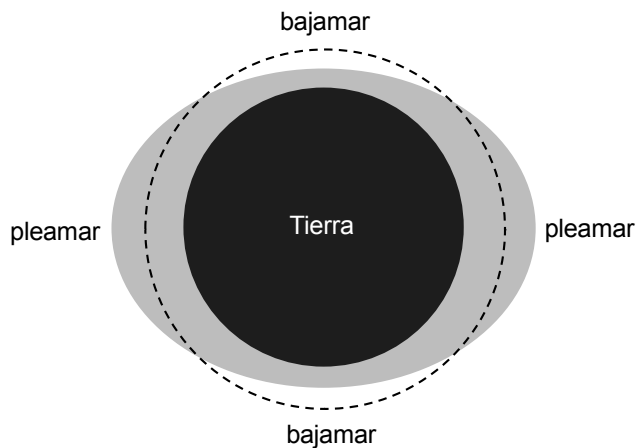
Las fuerzas de marea son mucho menores que el peso debido a la gravedad terrestre.

d) Para la longitud de los vectores tenemos en cuenta que $\vec{f}_B = \vec{f}_A$ y $\vec{f}_C = -\frac{|\vec{f}_A|}{2} \vec{j}$.



El dibujo es el mismo tanto si la Luna está en la parte derecha como en la izquierda.

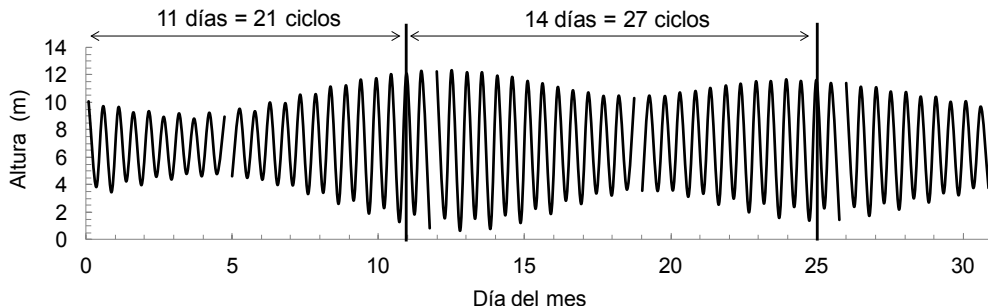
e) Las fuerzas de marea producen en la capa de agua una deformación que está sincronizada con la órbita lunar.



Las mareas causan una desaceleración en la rotación de la Tierra. Como el abultamiento de la marea se orienta hacia la Luna y la Tierra gira hacia el Este, el arrastre de la capa de agua debido a la fricción con la corteza terrestre frena la

rotación de la Tierra. Así, el período de rotación terrestre disminuye progresivamente. Al mismo tiempo, la Luna se aleja poco a poco de la Tierra*.

f) Obtenemos el periodo a partir de la gráfica, en la región de Loyola. Podemos ver que se producen aproximadamente 21 oscilaciones en un periodo de 11 días o 27 oscilaciones en 14 días. Tomamos la media de estas dos estimaciones.



Entonces, la frecuencia y el período de oscilación son

$$f = \frac{27 + 21 \text{ ciclos}}{14 + 11 \text{ días}} = 1,92 \text{ ciclos/día} \rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1,92} = 0,52 \text{ días}.$$

También podemos observar que el valor medio de la altura del mar, h_{media} , en el punto de medición es aproximadamente 7 m, y que la amplitud media de la oscilación, A , es de unos 4 m.

Así, la función que describe la altura del agua en el punto de medición de la región de Loyola, puede escribirse de forma armónica:

$$h(t) = h_{\text{media}} + A \cos(\omega t + \varphi),$$

donde $\omega = 2\pi / T = 2\pi f$, y φ indica el desfase entre la pleamar (marea alta) y inicio del mes. Tenemos en cuenta que el día 11 o el día 25 hay pleamar (altura máxima). Sustituimos en la fórmula y tenemos la expresión:

$$h(t) = 7 + 4 \cos(2\pi \cdot 1,92t),$$

donde la altura está expresada en metros y el tiempo en días.

g) Debido a la rotación terrestre, teniendo la Luna en una posición fija, se produciría una pleamar cada medio día terrestre o día sideral (recodemos que éste vale 23 horas, 56 minutos y 4 segundos = 86164 s). El período obtenido es de aproximadamente 0,52 días en vez de 0,5 días. Ello es debido que un día lunar es mayor que un día terrestre. El día lunar es el intervalo de tiempo entre un zénit lunar y el siguiente; es decir, el tiempo empleado por la Tierra para rotar una vez con relación a la Luna. Como la Luna gira alrededor de la Tierra en la misma dirección que la Tierra rota sobre su eje, transcurre algo más de un día para que veamos de nuevo a la Luna en la misma posición sobre el cielo. Puede calcularse que 1 día lunar es igual a 12 horas y 25,2 minutos $\approx 0,52$ días terrestres, que es el resultado obtenido**.

h) Con los datos de la superficie y la altura de la marea ($S = 1 \text{ km}^2$ y $h = 4 \text{ m}$) hay que obtener la potencia de la central energética. La potencia viene dada por

$$P = \frac{E}{t},$$

donde E equivale a la energía potencial de una masa m de agua que sube y baja por acción de la marea cada intervalo de tiempo t , es decir,

$$E_p = mg \frac{h}{2}.$$

Comenzamos obteniendo la masa del agua, ya que el resto de datos necesarios los tenemos. A partir de la superficie de agua de la que dispone la central y de la altura de ésta, podemos calcular el volumen total de un paralelepípedo de agua:

$$V = Sh = (10^3)^2 \cdot 4 = 4 \times 10^6 \text{ m}^3.$$

Como sabemos la densidad del agua ($\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$), obtenemos la masa:

$$m = \rho V = 10^3 \cdot 4 \cdot 10^6 = 4 \times 10^9 \text{ kg}.$$

Así, la energía potencial resulta

$$E_p = 4 \cdot 10^9 \cdot 9,8 \cdot \frac{4}{2} \approx 8 \times 10^{10} \text{ J}.$$

Pero esta energía se obtiene en las 12,4 horas que dura una marea, con lo cual la potencia será

$$P = \frac{E}{t} = \frac{8 \cdot 10^{10}}{12,4 \cdot 3600} = 1,8 \times 10^6 \text{ W} \approx 2 \text{ MW}.$$

Saber más

* Se calcula que la desaceleración de la Tierra debida a las mareas lunares produce un alargamiento del día en 2,2 ms por siglo. Por otra parte, como la Tierra pierde momento angular de rotación, la Luna gana momento angular orbital de manera que su órbita es ligeramente espiral alejándose de la Tierra poco a poco. Hay otros factores que también intervienen en la desaceleración de la Tierra, como las fuerzas gravitatorias de la Luna sobre el manto de la Tierra y factores atmosféricos.

Deines, S.D. y Williams, C.A. (2016). "Earth's rotational deceleration: determination of tidal friction independent of timescales". *The Astronomical Journal* 151(4), pp. 103-11.

Los datos de las mareas en Puerto Loyola y Puerto Madryn corresponden a una actualización para enero de 2020, tomados del Servicio de Hidrografía Naval de Argentina: <http://www.hidro.gov.ar/>.

** En la mayoría de los lugares, el constituyente más importante de las mareas lunares se denomina *constituyente principal semidiurna* o M2, y tiene un período de aproximadamente 12 horas y 25,2 minutos. Aunque las mareas dependen de muchos factores tales como el alineamiento del Sol y la Luna, la forma y tamaño de los océanos, la geometría de la línea de costa, etc.

21. Aplicaciones de los acelerómetros

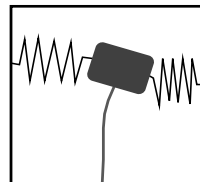
Un acelerómetro es un instrumento para medir aceleraciones. Existen varios tipos: mecánicos, de péndulo, piezoeléctricos, de condensador... Hay acelerómetros en muchas cámaras de fotos, en algunos automóviles, en casi todos teléfonos móviles... Y casi todos nosotros conocemos la consola de juegos Wii, en el interior de cuyo mando hay un acelerómetro para detectar nuestros movimientos y controlar al personaje en pantalla.

Responde a este surtido de cuestiones relacionadas con distintas aplicaciones de los acelerómetros:

a) En el interior de un vagón hay un acelerómetro basado en un péndulo que se inclina cuando el vagón se mueve con una aceleración a . Describe cómo obtenemos la aceleración sabiendo el ángulo α de inclinación del péndulo en equilibrio.

b) Un acelerómetro mecánico consiste en un dinamómetro del que cuelga una masa m , que nos indica la fuerza F actuante. ¿Cómo podemos obtener la aceleración?

c) Un acelerómetro de condensador consiste en una masa colocada entre dos muelles que están sujetos a las placas de un condensador. Cuando la masa se mueve horizontalmente debido a una aceleración o vibración, los muelles hacen que varíe la separación entre las placas. ¿Cómo puede obtenerse la aceleración a partir de la capacidad del condensador?



d) Un acelerómetro empleado para estudiar los daños a personas en accidentes, mediante *dummies* (muñeco de simulación de accidentes*), puede medir desaceleraciones de hasta $2000g$. ¿Cuántas veces más pesada debería ser la Tierra, sin cambiar de tamaño, para crear esa aceleración? ¿Cuántas veces más pequeña en diámetro debería ser, sin cambiar de masa, para someternos a esa aceleración?

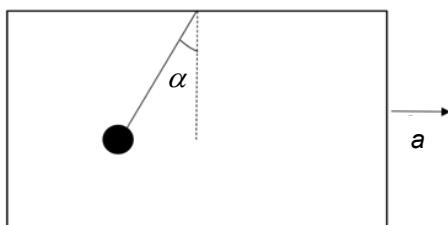
e) Un acelerómetro piezoeléctrico se acopla a la caja de una guitarra para medir sus vibraciones. Está conectado a un osciloscopio que nos da el espectro de frecuencias de vibración. Hacemos vibrar la primera cuerda (nota mi) y el osciloscopio nos da una frecuencia de 330 Hz. ¿Qué frecuencia detectaremos si apretamos la cuerda contra el mástil acortándola a $2/3$ de su longitud inicial?

f) Otra aplicación es en los sismógrafos para medir las características de las ondas sísmicas. Si una onda sísmica tiene una frecuencia de 10 Hz y viaja a 5 km/s en el granito, ¿Qué longitud de onda posee?

g) Utilizamos un teléfono móvil que dispone de un acelerómetro interno** para medir velocidades del puño de un boxeador (el teléfono lo sujeta con la mano). Explica cómo relacionarías la cantidad de movimiento adquirida por el teléfono, con la aceleración medida por su acelerómetro.

Resolución

a) Comenzamos haciendo un dibujo y un diagrama de fuerzas.



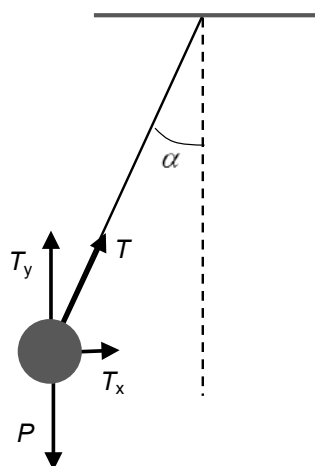
A partir del diagrama, es fácil obtener la aceleración del péndulo, ya que

$$T_y = P \rightarrow T \cos \alpha = mg,$$

$$T_x = T \sin \alpha = ma.$$

Luego,

$$\tan \alpha = \frac{a}{g}.$$

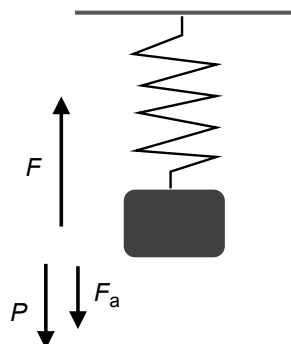


b) Hacemos de nuevo un diagrama que nos ayude a interpretar el enunciado. La relación entre la aceleración y las fuerzas que actúan es

$$F = P + F_a = m(g + a).$$

De manera que podemos obtener la aceleración, conocidas la fuerza F medida por el dinamómetro y la masa m suspendida:

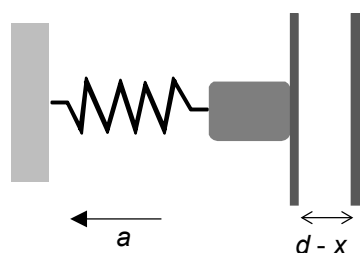
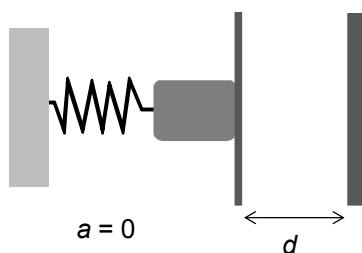
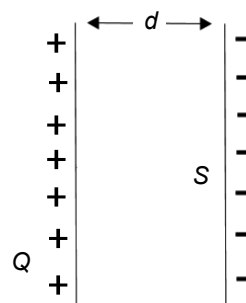
$$a = \frac{F - mg}{m} = \frac{F}{m} - g.$$



c) Sea un condensador plano-paralelo cuyas placas tienen una superficie S y están separadas una distancia d . La capacidad del condensador viene dada por

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}.$$

En el siguiente esquema representamos uno de los posibles diseños de un acelerómetro capacitivo. La masa, m , sujeta por un muelle a un lateral fijo, puede desplazar una de las placas acercándola o alejándola de la otra placa (fija):



Al cambiar la separación de las placas, cuando hay una aceleración, también varía la capacidad del condensador:

$$C(x) = \varepsilon_0 \frac{S}{d - x}.$$

El valor de x se obtiene mediante la ley de Hooke, conocida la constante del muelle:

$$-ma = kx \rightarrow x = \frac{-ma}{k}.$$

Al hacer la diferencia entre la capacidad inicial y la final, queda

$$\Delta C = \varepsilon_0 S \left(\frac{1}{d - x} - \frac{1}{d} \right) \approx \varepsilon_0 S \frac{x}{d^2} = C \frac{x}{d} = -C \frac{ma}{kd}.$$

Así, la aceleración puede obtenerse a partir de las variaciones de la capacidad mediante la expresión

$$a = -\frac{kd}{m} \frac{\Delta C}{C}.$$

Si aumenta la capacidad del condensador, $\Delta C > 0$ (es decir, se han acercado las placas), la aceleración es negativa, como se ha representado en el dibujo anterior.

d) El enunciado da como dato $g/g_0 = 2000$, lo cual junto a la expresión de la aceleración de la gravedad bastará para obtener el peso que tendría que tener la Tierra (con el mismo radio) para tener esa aceleración, ya que

$$\frac{g}{g_0} = \frac{\frac{GM}{R^2}}{\frac{GM_T}{R^2}} \rightarrow \frac{g}{g_0} = 2000 = \frac{M}{M_T}.$$

Así, la masa de la Tierra debería ser: $M = 2000 M_T$

De la otra manera, calculamos el radio que tendría la Tierra pero manteniendo la masa constante:

$$\frac{g}{g_0} = 2000 = \left(\frac{R_T}{R} \right)^2 \rightarrow R = \frac{R_T}{\sqrt{2000}} = \frac{R_T}{44,72}.$$

Con lo cual el diámetro terrestre sería casi 45 veces menor.

e) El enunciado dice que una cuerda de longitud L_0 produce una frecuencia de vibración de 330 Hz, y se nos pide la frecuencia de la misma cuerda con longitud $L = 2L_0/3$. Como en la cuerda se producen ondas estacionarias, para el modo fundamental podemos expresar la longitud de la cuerda en función de la semilongitud de onda:

$$L = \frac{\lambda}{2}.$$

Sabiendo que $\lambda = v/f$, podemos obtener la frecuencia:

$$L = \frac{\lambda}{2} = \frac{v}{2f} \rightarrow \frac{L}{L_0} = \frac{f_0}{f},$$

$$f = \frac{L_0}{L} f_0 = 330 \cdot \frac{3}{2} = 495 \text{ Hz}.$$

Con lo cual, la frecuencia final será de 495 Hz.

f) Tenemos una onda sísmica en el granito de frecuencia $f = 10 \text{ Hz}$ y velocidad $v_{\text{granito}} = 5 \text{ km/s} = 5 \times 10^3 \text{ m/s}$. La longitud de onda es

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{5 \cdot 10^3}{10} = 500 \text{ m}.$$

g) La variación de la cantidad de movimiento viene relacionada con la fuerza de forma lineal, es decir:

$$F = \Delta p.$$

Saber más

* Los *crash test dummy dummies* (maniquí para ensayos de choque) son muñecos antropomórficos a escala natural de las personas, que se utilizan para las pruebas de seguridad de los vehículos. Incluyen multitud de sensores para conocer la que sería la respuesta del cuerpo en los accidentes sin necesidad de utilizar cadáveres, animales o personas voluntarias. Gracias a estos muñecos se han salvado muchas vidas, ya que permiten mejorar el diseño de los nuevos modelos de vehículos.

** Los teléfonos móviles incluyen tres acelerómetros, uno para cada uno de los ejes espaciales. Existen distintas *apps* que permiten obtener los valores de aceleración y utilizar así el teléfono como un laboratorio de física. Por ejemplo, una de estas aplicaciones es *Physical Phone Experiments* (<https://phyphox.org/>).

22. Calentándonos en el Guggenheim

Si visitas Bilbao tienes la oportunidad de ver el museo Guggenheim. Es un edificio muy curioso, revestido por planchas de titanio según lo diseñó su creador Frank Gehry, que se inspiró en las plumas y escamas de animales.



En un día soleado tanto el recubrimiento del Guggenheim como el agua de la ría de Bilbao, a su lado, se calientan debido a la radiación solar. Supongamos que dos masas iguales de agua y de titanio han absorbido una cantidad idéntica de calor. Si la masa de agua se ha calentado $1\text{ }^{\circ}\text{C}$, determina cuántos grados se habrá calentado el titanio. (Despreciamos la interacción con el entorno).

Datos: calor específico del titanio = $0,52\text{ J/kg}\cdot\text{K}$, calor específico del agua = $4,18\text{ J/kg}\cdot\text{K}$.

Resolución

El enunciado nos proporciona como datos que las masas de agua y titanio son iguales, y que estas absorben la misma cantidad de calor. Si llamamos m a la masa y Q al calor, tenemos

$$\text{masa agua (H}_2\text{O)} = \text{masa titanio (Ti)} = m.$$

Y utilizando la fórmula del calor según el primer principio de la termodinámica:

$$Q = m c_{\text{H}_2\text{O}} \Delta T_{\text{H}_2\text{O}} = m c_{\text{Ti}} \Delta T_{\text{Ti}},$$

donde $c_{\text{H}_2\text{O}}$ y c_{Ti} son los calores específicos del agua y del titanio, respectivamente.

Despejando el incremento de temperatura del titanio:

$$\Delta T_{\text{Ti}} = \frac{c_{\text{H}_2\text{O}}}{c_{\text{Ti}}} \Delta T_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{4,18\text{ J/kg}\cdot\text{K}}{0,52\text{ J/kg}\cdot\text{K}} \cdot 1^{\circ}\text{C} = 8^{\circ}\text{C}.$$

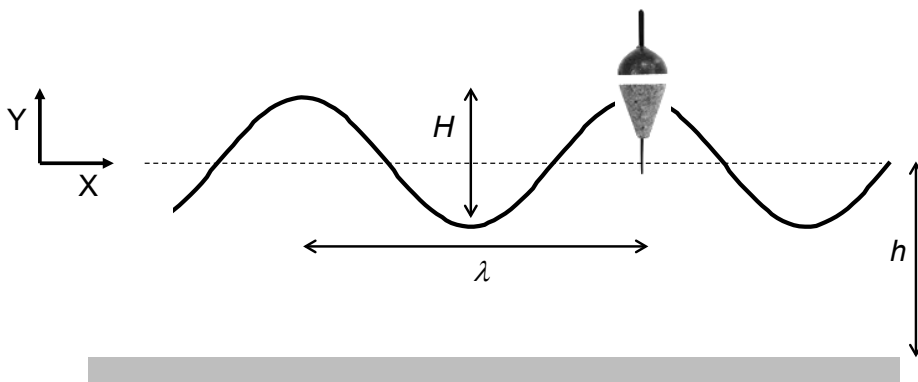
La masa de titanio se ha calentado 8 veces más que el agua pues su calor específico es unas 8 veces menor.

23. El corcho del pescador

El corcho de un pescador oscila verticalmente sobre la superficie del agua en una zona de poca profundidad. Suponemos que el movimiento ondulatorio de las olas puede describirse mediante la expresión $y(x,t) = A \sin(\omega t - kx)$. Se llama *altura* de una ola, H , a la diferencia de altura entre una cresta y un valle. Por otro lado, se sabe que en aguas poco profundas la velocidad de propagación de las olas es $v = \sqrt{gh}$, donde h es la profundidad de agua.

Si la profundidad del agua es 2 m, la altura de las olas 30 cm y la longitud de onda 10 m, obtén el valor de las siguientes magnitudes:

- El período de oscilación del corcho.
- La velocidad máxima a la que oscila el corcho en el eje Y.



Resolución

Primero recopilamos los datos que nos proporciona el enunciado, escribiéndolos en el SI: $h = 2$ m, $H = 30$ cm = 0,3 m, y $\lambda = 10$ m.

a) La ecuación que relaciona el periodo de oscilación con la longitud de onda es $\lambda = vT$, con lo cual utilizando la relación $v = \sqrt{gh}$ de aguas someras, y con los datos del enunciado, nos queda

$$T = \frac{\lambda}{\sqrt{gh}} = \frac{10}{\sqrt{9,8 \cdot 2}} = 2,26 \text{ s}.$$

También podemos conocer la velocidad de las olas en esas aguas:

$$v = \sqrt{gh} = \sqrt{9,8 \cdot 2} = 4,43 \text{ m/s}.$$

b) Para calcular la velocidad del corcho en el eje Y derivamos respecto al tiempo la ecuación del movimiento ondulatorio de las olas

$$v_y = \frac{dy}{dt} = A\omega \cos(\omega t - kx).$$

La velocidad en el eje Y será máxima cuando v_y tenga el máximo valor posible, y esto ocurrirá cuando $\cos(\omega t - kx) = 1$, con lo cual tendremos

$$v_y = A\omega = \frac{H}{2} \frac{2\pi}{T} = \frac{0,3 \cdot \pi}{2,26} = 0,42 \text{ m/s},$$

donde hemos considerado que $H = 2A$ y que la velocidad angular es $\omega = 2\pi / T$.

Saber más

La expresión exacta para la velocidad de las olas viajeras es

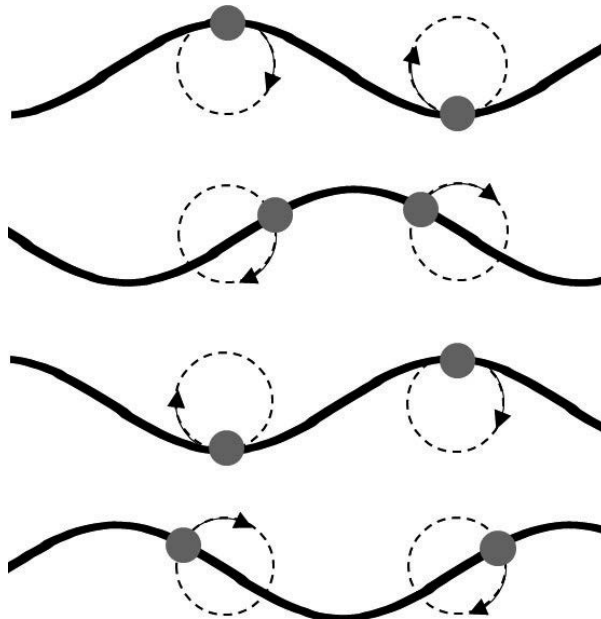
$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(2\pi \frac{h}{\lambda}\right)}.$$

La tangente hiperbólica de x es aproximadamente 1 si x es grande, y se aproxima a x para valores de x pequeños.

Así, en aguas profundas: $h \geq \frac{\lambda}{2} \rightarrow v \approx \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$.

Y en aguas someras: $h \leq \frac{\lambda}{20} \rightarrow v \approx \sqrt{gh}$.

En realidad, las moléculas de agua (y, por lo tanto, el corcho) describen un movimiento circular de vaivén que hemos despreciado en este problema. La posición media de cada molécula no cambia (a no ser que exista un arrastre de agua o una corriente), pero oscila de la forma indicada en el dibujo conforme avanza la ola.



24. Entrenamiento ciclista

Un ciclista se propuso subir desde el Santuario de la Fuensanta (Murcia) hasta la Cresta del Gallo y regresar por el mismo camino, con una velocidad media de 20 km/h en el recorrido completo. Durante el ascenso comprobó que no estaba en tan buena forma física como él pensaba y sólo pudo subir a un promedio de 10 km/h. En la cima se dijo: «Bueno, no pasa nada, como he subido a 10 km/h, si bajo a 30 km/h es obvio que obtendré la velocidad media final de 20 km/h». Sin embargo, al regresar a la Fuensanta vio que el velocímetro de su bicicleta no marcaba el valor promedio que él esperaba.

Contesta a estas preguntas:

- a) ¿Cuál fue la velocidad media real que obtuvo el ciclista en el recorrido completo?
- b) ¿A qué velocidad debería haber bajado para que la velocidad media final sí hubiese sido de 20 km/h como pretendía?

Resolución

a) Llamemos d a la distancia entre la Fuensanta y la Cresta del Gallo. En el trayecto de ida tarda un tiempo t_1 a una velocidad $v_1 = 10$ km/h, y en la bajada tarda un tiempo t_2 a una velocidad $v_2 = 30$ km/h.

En el trayecto total de subida y bajada, cuya distancia total es $2d$, conseguirá una velocidad media:

$$\bar{v} = \frac{2d}{t_1 + t_2} = \frac{2d}{\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}} = 2 \frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 2 \frac{10 \cdot 30}{10 + 30} = 15 \text{ km/h}.$$

b) Para que la velocidad promedio tenga el valor deseado, de acuerdo al apartado anterior la velocidad de bajada debe ser:

$$\bar{v} = \frac{2}{1/v_1 + 1/v_2} \rightarrow v_2 = \frac{v_1 \bar{v}}{2v_1 - \bar{v}}.$$

Según el enunciado queremos que $\bar{v} = 2v_1$; entonces necesitaríamos $v_2 \rightarrow \infty$, lo cual es imposible.

Saber más

La Cresta del Gallo, también conocida como La Panocha, es punto habitual de la práctica ciclista por la dureza de alguno de sus tramos. El puerto de montaña, considerado de 2ª categoría suele ser final de etapa en algunas ediciones de la Vuelta a España. En 5 km hay que ascender un desnivel de unos 300 m, con pendientes que oscilan entre el 5 % y el 10 %.



25. Péndulo deslizante

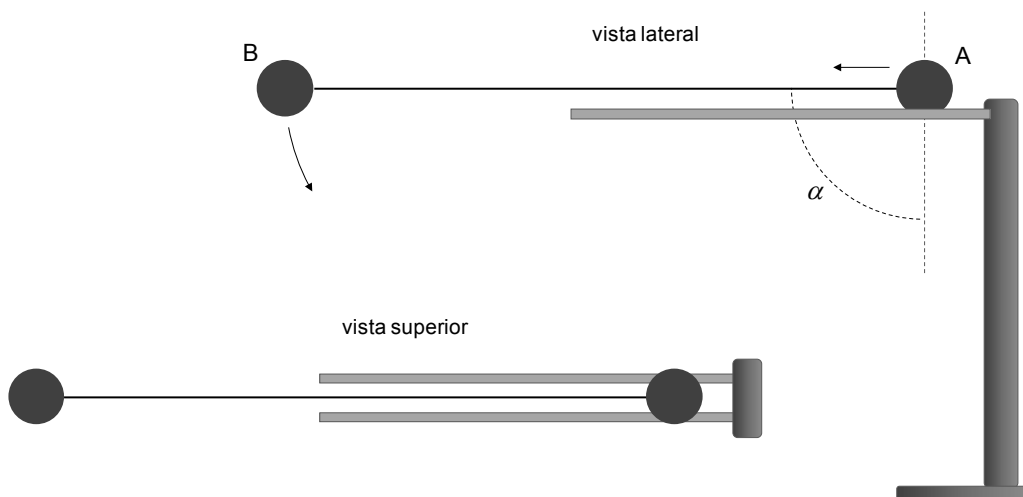
Dos masas iguales, A y B, están unidas mediante un hilo inextensible de longitud L y masa despreciable. La masa A está apoyada sobre una guía horizontal y puede deslizarse sin rozamiento sobre ella, mientras que la B tiene un movimiento pendular respecto de A. En el instante inicial se abandona el sistema en la posición que muestra la figura, correspondiente a $\alpha = \pi/2$, donde α es el ángulo que forma con la vertical la recta que une A y B. Se pide (justificando las respuestas):

a) Representar sobre el dibujo la posición de las dos masas y la posición del centro de masas en el instante en que $\alpha = 0$.

b) Dar, en función de L , la posición del centro de masas en el instante en que $\alpha = 0$.

(Considera las masas puntuales. Utiliza un sistema de referencia fijo respecto a la guía cuyo origen, O, está en la posición de la masa A en el instante inicial.)

c) Hallar el período de las pequeñas oscilaciones.



Resolución

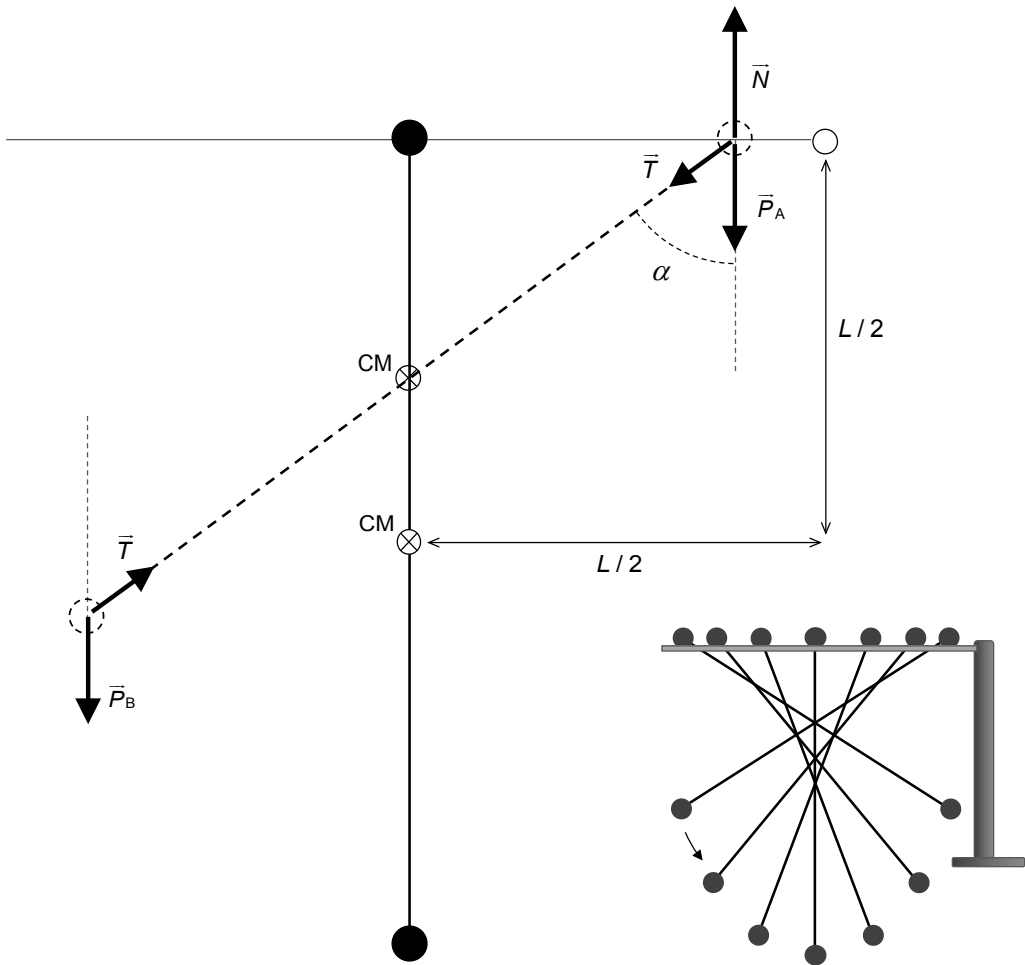
a) De la aplicación de la segunda ley de Newton al sistema de las dos masas, sabemos que la suma de las fuerzas externas aplicadas al sistema es igual al producto de la masa total por la aceleración del centro de masas:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M \vec{a}_{\text{CM}}.$$

Las fuerzas externas son los pesos de A y B, $\vec{P}_B$ y $\vec{P}_A$, y la resistencia normal, $\vec{N}$, que ejerce la guía sobre la masa A. Las fuerzas de tensión, $\vec{T}$, son internas, no externas.

De acuerdo al dibujo vemos que las fuerzas externas sólo tienen componente vertical y no horizontal; por tanto, la componente X de la aceleración del centro de masas es nula, es decir, la posición horizontal del centro de masas no varía. La posición del centro de masas siempre está en el punto medio entre las masas (por ser las dos masas iguales). Como inicialmente, cuando $\alpha = \pi/2$, la componente X del centro de

masas estaba en $x_{CM} = -L/2$ (tomando como origen la posición de la masa A en $\alpha = \pi/2$), entonces $x_{CM} = -L/2$ para todo α , y en particular también para $\alpha = 0$.



b) Por lo razonado en el apartado anterior es evidente que si tomamos como origen de coordenadas la posición de la masa A cuando $\alpha = \pi/2$, entonces, para $\alpha = 0$:

$$\vec{r}_{CM} = (-L/2, -L/2).$$

c) Ocurren oscilaciones en torno al eje vertical que pasa por el centro de masas (que no se mueve horizontalmente). La posición, x , de las masas desde dicho eje cumple

$$\sin \alpha = \frac{2x}{L}.$$

El balance de fuerzas sobre la masa B es

$$\begin{cases} mg - T \cos \alpha = m a_y \\ T \sin \alpha = -m a_x \end{cases}.$$

Como para pequeñas oscilaciones $\cos \alpha \approx 1$ y $a_y \approx 0$, la tensión es $T \approx mg$. Por tanto,

$$T \sin \alpha = mg \frac{2x}{L} = -ma_x \rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{2g}{L} x,$$

donde reconocemos la ecuación del MAS con frecuencia $\omega^2 = 2g/L$. Entonces, el período es

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}}.$$

(Compárese con el período del péndulo simple $2\pi \sqrt{L/g}$.)

Saber más

Podríamos preguntarnos por la periodicidad del movimiento de la masa B en el eje vertical. Medimos su separación, y , desde la posición inferior (para $\alpha = 0$). Entonces se cumple

$$\cos \alpha = \frac{L-y}{L}.$$

Como $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ y sabemos de antes que $\sin \alpha = \frac{2x}{L}$, tenemos

$$\left(\frac{L-y}{L}\right)^2 + \left(\frac{2x}{L}\right)^2 = 1 \rightarrow L^2 + y^2 - 2Ly + 4x^2 = L^2 \rightarrow y^2 - 2Ly + 4x^2 = 0.$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado y suponemos que $x \ll L$ para pequeñas oscilaciones:

$$y = \frac{2L - \sqrt{4L^2 - 16x^2}}{2} = L - L\sqrt{1 - \frac{4x^2}{L^2}} \approx L - L\left(1 - \frac{2x^2}{L^2}\right) = \frac{2x^2}{L}.$$

Entonces, si la ecuación del MAS en el eje X es $x(t) = x_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau}$, con periodo

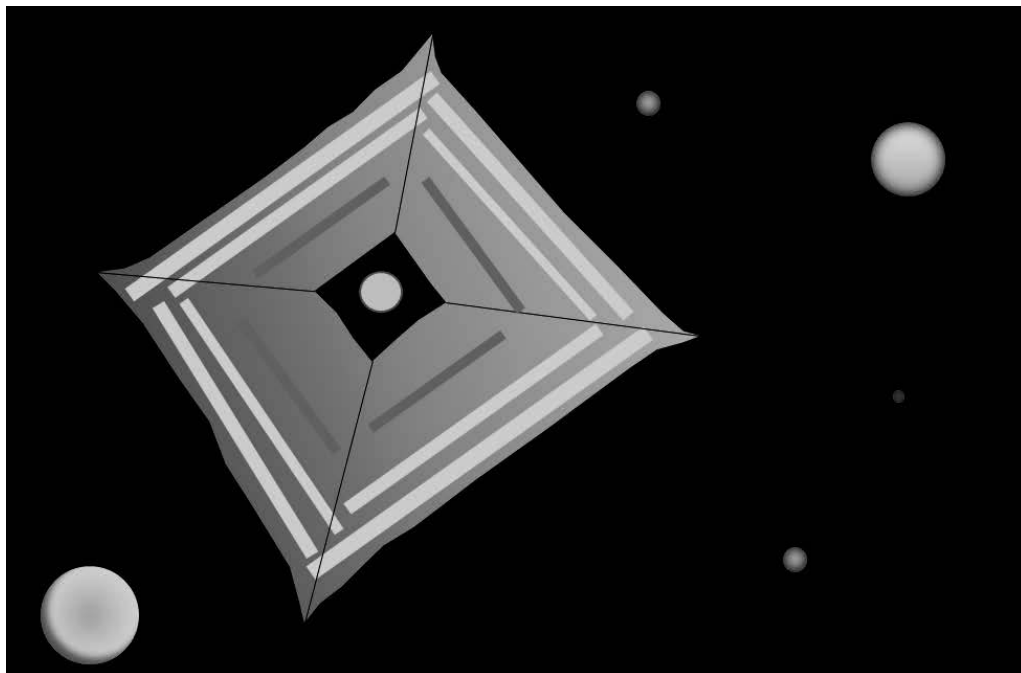
$\tau = 2\pi \sqrt{L/2g}$, la ecuación en el eje Y será

$$y(t) = \frac{2x_0^2}{L} \cos^2 \frac{2\pi t}{\tau} = \frac{x_0^2}{L} \left(1 + \cos \frac{2\pi t}{(\tau/2)}\right),$$

que podemos escribir como un MAS cuyo período es la mitad que el período de la oscilación en X. A la vista de la geometría del problema, se comprende fácilmente que cuando la masa va y vuelve en horizontal, sube y baja dos veces en vertical.

26. Veleros espaciales

Un método propuesto para viajar por el cosmos a distancias interestelares consiste en utilizar las llamadas *velas solares*. (De hecho, ya se han lanzado varios prototipos). La idea consiste en aprovechar la energía luminosa del Sol para impulsar una gran vela desplegada en el espacio. El fundamento físico es el siguiente: la luz está compuesta por partículas llamadas fotones que transportan energía E y momento lineal p . La relación entre la energía y el momento de cada fotón es $p = E/c$, siendo c la velocidad de la luz. Cuando los fotones impactan contra la vela le comunican momento lineal y la impulsan.



Supongamos que se sitúa una nave en órbita alrededor del Sol, a una distancia R igual a la que hay de la Tierra al Sol. La nave consiste en una vela solar plana, de masa m y área A , que está siempre orientada perpendicularmente a los rayos solares. A partir de este instante inicial, la nave-vela comenzará a alejarse del Sol.

a) Si la nave tiene una masa de 100 kg, calcula su energía total en el instante inicial (cuando está orbitando alrededor del Sol a una distancia R). Dato: radio aproximado de la órbita terrestre $R = 150$ millones de km.

b) Demuestra que la potencia que recibe la vela a una distancia r del Sol es

$$P_{\text{vela}} = \frac{A}{4\pi r^2} P_{\text{Sol}}.$$

c) Utilizando la expresión $F = \Delta p / \Delta t$, demuestra que la fuerza que actúa sobre la vela es $F = P_{\text{vela}} / c$ si la vela está pintada de color negro perfecto (absorbe todos los fotones que le llegan), y que es $F = 2P_{\text{vela}} / c$ si la superficie de la vela es un espejo perfecto (refleja los fotones en lugar de absorberlos).

d) Queremos que la nave escape del Sistema Solar tarde o temprano. Demuestra que la masa por unidad de área máxima que puede tener la vela para poder escapar, en el caso de la vela-espejo, viene dada por

$$\frac{m}{A} = \frac{1}{\pi c} \frac{P_{\text{Sol}}}{GM_{\text{Sol}}},$$

donde M_{Sol} es la masa del Sol y G la constante de gravitación universal.

(Ayuda: Ten en cuenta que sobre la nave actúa la fuerza gravitatoria del Sol más la fuerza ejercida por la luz. Calcula el trabajo realizado por la resultante de estas dos fuerzas entre R e infinito y compáralo con el incremento de energía necesario para el escape. Desprecia la interacción gravitatoria de todos los planetas, incluida la Tierra.)

Resolución

a) Tenemos que calcular la energía total de un cuerpo de masa $m = 100 \text{ kg}$ en órbita circular a una distancia R del Sol. Sabemos que en una órbita, la energía total, suma de la energía cinética más la potencial, es

$$E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_{\text{Sol}}m}{R} = \frac{1}{2}E_p = -\frac{GM_{\text{Sol}}m}{2R} = -E_c = -\frac{mv^2}{2},$$

siendo v la velocidad orbital a la distancia que separa la Tierra del Sol y que, por tanto, corresponde a un periodo de un año: $v = 2\pi R / T$. Así,

$$E_T = -2m \left(\frac{\pi R}{T} \right)^2 = 2 \cdot 100 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 150 \cdot 10^9}{365 \cdot 24 \cdot 3600} \right)^2 = -4,44 \times 10^{10} \text{ J}.$$

b) La energía por unidad de área y por unidad de tiempo que le llega a la vela a una distancia r del Sol es $I = P_{\text{Sol}} / 4\pi r^2$. Por tanto, para obtener la energía por unidad de tiempo que le llega a la vela hay que multiplicarlo por la superficie de la vela:

$$P_{\text{vela}} = A \frac{P_{\text{Sol}}}{4\pi r^2}.$$

c) La cantidad de movimiento transferida a la vela es igual a la cantidad de movimiento que pierde el fotón. Ello se demuestra a partir de la conservación de la cantidad de movimiento:

$$\vec{p}_\gamma = \vec{p}_{\text{vela}} + \vec{p}'_\gamma \rightarrow \Delta \vec{p} = \vec{p}_{\text{vela}} = \vec{p}_\gamma - \vec{p}'_\gamma,$$

donde $\vec{p}_\gamma$ es el momento del fotón antes de impactar con la vela y $\vec{p}'_\gamma$ es el momento después de impactar con la vela.

Si la vela es negra (el fotón es absorbido), entonces $\vec{p}'_\gamma = 0$; mientras que si es un espejo perfecto, el fotón cambia de sentido tras el choque con la vela: $\vec{p}'_\gamma = -\vec{p}_\gamma$. Por tanto, para una vela negra: $\Delta p = p_\gamma$, mientras que para un espejo: $\Delta p = 2p_\gamma$.

Según la segunda ley de Newton, la fuerza que experimenta la vela es $F = \Delta p / \Delta t$. Como cada fotón lleva un momento $p = E / c$, y llega una energía por unidad de tiempo P_{vela} , entonces la transferencia de momento por unidad de tiempo es

$$F = \frac{P_{\text{vela}}}{c} \text{ para la vela negra, } F = \frac{2P_{\text{vela}}}{c} \text{ para la vela espejada.}$$

d) La condición de escape es que en el infinito la energía ha de ser nula (o mayor que cero, pero como mínimo cero). Por tanto, el trabajo realizado por la fuerza de radiación ha de compensar la energía en la órbita terrestre. Este trabajo es

$$W_{\text{rad}} = \int_R^{\infty} \vec{F}_{\text{rad}} \cdot \vec{dl} = \int_R^{\infty} F_{\text{rad}} dl \cos \alpha = \int_R^{\infty} F_{\text{rad}} dr ,$$

donde α es el ángulo entre la dirección de movimiento y la dirección radial, dl es el elemento de longitud en la dirección de movimiento y dr es el elemento de distancia en la dirección radial.

Según los apartados anteriores, para una vela negra tendríamos

$$W_{\text{rad}} = \int_R^{\infty} \frac{A}{4\pi r^2} \frac{P_{\text{Sol}}}{c} dr = \frac{A}{4\pi c} \frac{P_{\text{Sol}}}{R} .$$

Igualando al valor de la energía orbital, se debe cumplir que $\frac{A}{4\pi c} \frac{P_{\text{Sol}}}{R} = -\frac{GM_{\text{Sol}} m}{2R}$,

de donde se obtiene la expresión

$$\frac{m}{A} = \frac{1}{2\pi c} \frac{P_{\text{Sol}}}{GM_{\text{Sol}}} .$$

En el caso de una vela-espejo hay que multiplicar el resultado por un factor 2 (según el apartado anterior), y se obtiene la expresión indicada en el enunciado.

Saber más

En 2010, con el proyecto IKAROS, de la Agencia Japonesa del Espacio (JAXA), se lanzó la primera vela solar al espacio con éxito. La vela mide 20 m de diagonal.

Página el proyecto IKAROS: <https://global.jaxa.jp/projects/sas/ikaros/>.

Otros proyectos de vela solar: https://en.wikipedia.org/wiki/Solar_sail.

En 2016, un grupo de millonarios, entre los que se encuentra Mark Zuckerberg, y con el apoyo científico de Stephen Hawking entre otros, crearon una iniciativa (*Starshot*) con una inversión inicial de varios cientos de millones de dólares para investigar una posible forma de viajar a la estrella más cercana, Alpha Centauri (a 4 años-luz), mediante el uso de velas solares de tamaño del orden del centímetro impulsadas no por la radiación solar sino por una serie de láseres superpotentes desde la Tierra. Según las estimaciones iniciales, para acelerar las velas a una velocidad en torno a un 20 % de la velocidad de la luz haría falta una batería de láseres de potencia total de 100 GW (que es unas 100 veces la potencia típica de una central de fisión, como la de Cofrentes) y tardarían en llegar unos 20 o 30 años.

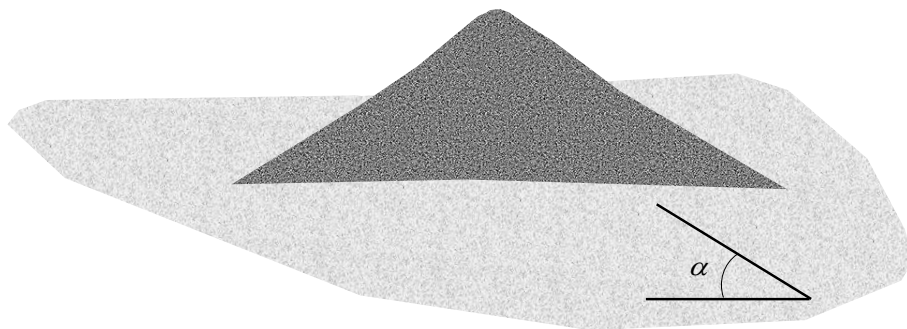
Página web de la iniciativa *Starshot*: <http://breakthroughinitiatives.org/initiative/3>.

Los cálculos físicos y los detalles del proyecto desde el punto de vista científico están publicados en: <https://arxiv.org/abs/1604.01356>.

27. Un montón de arena

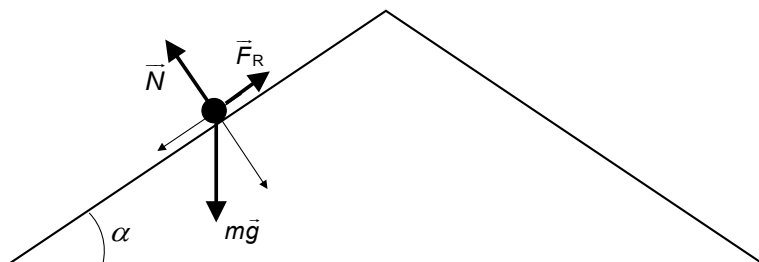
Se denomina *coeficiente de rozamiento interno* de un material granuloso (como la arena o la gravilla) al coeficiente de rozamiento entre los granos que lo componen.

Si se vierte arena sobre el suelo, el montón resultante adquiere una forma cónica una vez alcanzado el equilibrio. Obtén la relación matemática entre el coeficiente de rozamiento μ y el ángulo interno α que forma la generatriz del cono con el suelo.



Resolución

Consideremos un grano de arena sobre la superficie del montón de arena. En el equilibrio, la fuerza de rozamiento, $\vec{F}_R$, compensa a la componente del peso en la dirección del plano de la pendiente.



En la dirección del plano de la pendiente se cumple $mg \sin \alpha = \mu N$, siendo la normal $N = mg \cos \alpha$. Por tanto, la relación entre el coeficiente de rozamiento y el ángulo es

$$\sin \alpha = \mu \cos \alpha \rightarrow \tan \alpha = \mu.$$

Saber más

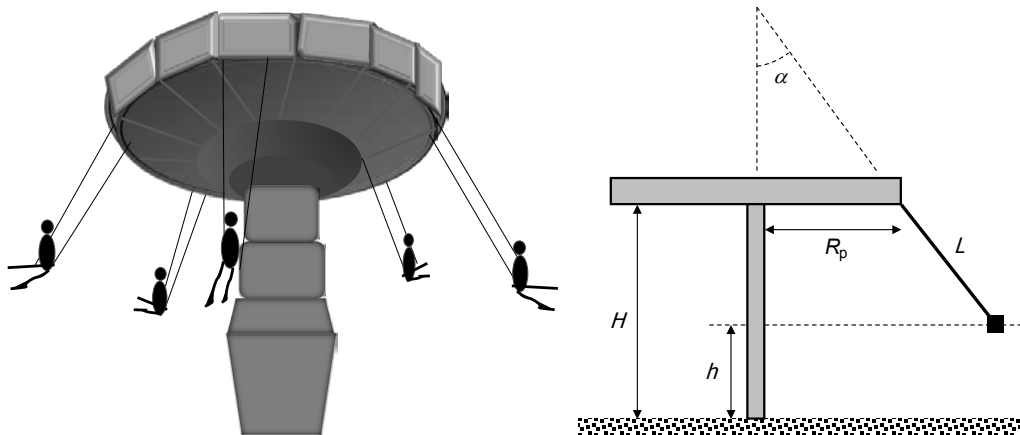
Al ángulo α se le conoce como *ángulo de reposo*. Puedes encontrar más información, así como valores de este ángulo para distintos materiales en el artículo: https://en.wikipedia.org/wiki/Angle_of_repose.

Para un estudio mucho más elaborado del problema aplicado a ingeniería de suelos ver la tesis: <http://d-scholarship.pitt.edu/6401/1/MSThesisZhichaoLiu03042011.pdf>.

Al-Hashemi, H.M.B. y Al-Amoudi, O.S.B. (2018). "A review on the angle of repose of granular material". *Powder Technology* 330, pp. 397-417.

28. Sillas voladoras

En el parque de atracciones Terra Mítica (Alicante) hay una atracción llamada Los Ícaros, o *sillas voladoras* (ver figura), que vamos a modelizar de la siguiente forma: supondremos que consiste en una plataforma circular de radio $R_p = 5$ m, elevada 7 m respecto al suelo, paralela siempre al suelo (en la realidad se inclina un poco, pero no consideraremos este efecto), que gira con velocidad angular ω constante respecto a su eje, y de cuyo perímetro pende de una cadena de longitud $L = 5$ m una silla con una persona. Llamemos α al ángulo que forma la cadena con la vertical y M a la masa total de la silla más la persona.



a) Obtén la tensión a la que está sometida la cadena y la fuerza centrípeta que actúa sobre el conjunto silla-pasajero, en función de M , g y α .

b) Demuestra que α se relaciona con la velocidad angular mediante la expresión

$$\omega^2 = \frac{g \tan \alpha}{R_p + L \sin \alpha}. \quad (\text{Ecuación 1})$$

c) Utiliza los datos numéricos del enunciado y calcula ω para los valores de $\alpha = k\pi / 16$ radianes, donde k es un número entero de 0 a 7. Utilizando los ocho puntos calculados, realiza una representación gráfica de α .

d) Razona cuál es el máximo valor que puede alcanzar α y cuánto debería valer la velocidad angular en ese caso.

e) Un acompañante que espera fuera de la atracción observa que $\alpha = 45^\circ$ y cronometra que el viaje dura 3 minutos. Determina el período de rotación de la plataforma. Calcula cuántas vueltas da cada silla durante el viaje y la distancia que recorre. (Se desprecia el tiempo empleado en el proceso de arranque y frenado.)

f) En las condiciones del apartado anterior y a la vista de la gráfica, razona qué diferencia aproximada habría en el ángulo de elevación de la silla si el operario de la atracción cometiera un error de 0,1 rad/s en la velocidad de giro.

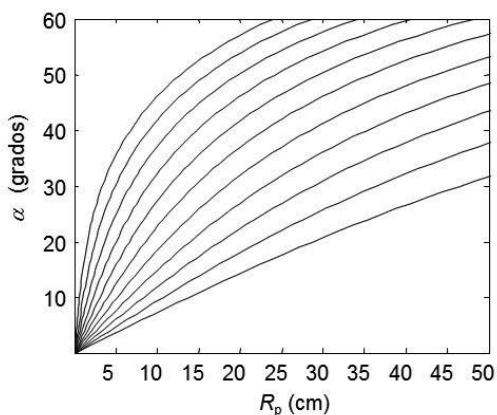
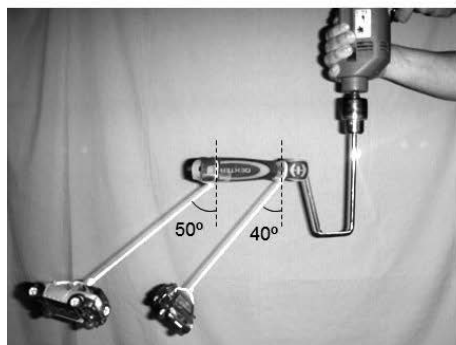
g) La cadena puede soportar sin romperse una tensión correspondiente al peso de una masa $M_{\max}$ cuando la atracción está en reposo. Obtén el ángulo máximo, $\alpha_{\max}$,

al que puede elevarse una silla y su pasajero (expresarlo en función de $M_{\max}$ y M , siendo M la masa de la silla más la persona).

h) El diseño de una determinada cadena tolera una masa $M_{\max} = 1000$ kg. Se sube a la atracción una persona obesa de masa tal que $M = 195$ kg. ¿Cuál es la máxima velocidad angular a la que podría girar la plataforma sin que se rompiera la cadena?

i) Supongamos que una avería en el motor provoca que se alcance la velocidad angular crítica del apartado anterior, y en consecuencia la cadena se rompe. Calcula el módulo de la velocidad y el ángulo respecto a la horizontal con que impacta en el suelo la silla voladora con la persona.

j) Hemos recreado la atracción utilizando un taladro eléctrico que hace girar un brazo del que cuelgan “cochecitos voladores” atados a distintas distancias desde el eje de giro, en particular: $R_p = 15$ y 25 cm (ver fotografía). Si a partir de la ecuación 1 representamos el ángulo de inclinación que se alcanza en función de R_p , obtenemos la gráfica de la figura, donde las curvas mostradas corresponden a frecuencias de giro desde 0,5 a 1 vueltas/s (en incrementos de 0,05 vueltas/s). Identifica cuál de las curvas corresponde a la situación de la fotografía en nuestra recreación, e indica a cuántas vueltas por segundo giraba el taladro.



Resolución

a) Las fuerzas que actúan sobre la masa M son (ver dibujo): el peso, $M\vec{g}$, la tensión de la cuerda, $\vec{T}$, y la fuerza centrífuga, $\vec{F}_c$. Para un valor de α constante las componentes horizontales y verticales de las fuerzas deben anularse pues no hay aceleración en el eje vertical ni horizontal. Así, se debe cumplir en el eje vertical:

$$T \cos \alpha = Mg \rightarrow T = \frac{Mg}{\cos \alpha}.$$

Por otro lado, la fuerza centrípeta, en módulo, es

$$F_c = M\omega^2 r = M\omega^2 (R_p + L \sin \alpha),$$

pues r es la distancia de la masa al eje de rotación.

b) Si planteamos la condición de equilibrio en el eje horizontal:

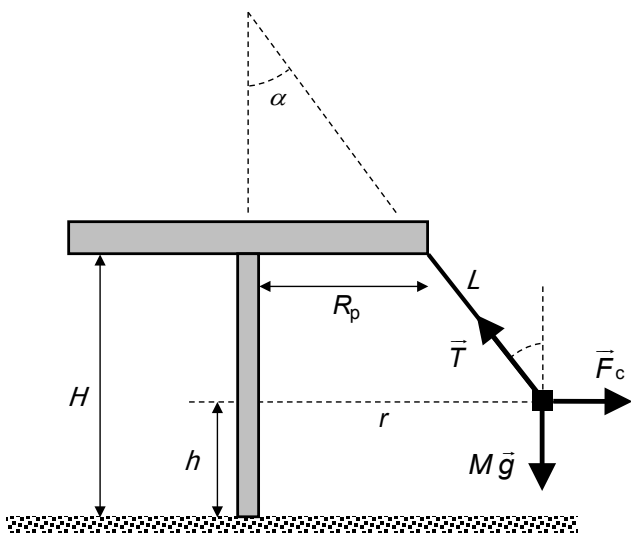
$$F_c = T \sin \alpha ,$$

resulta

$$T \sin \alpha = M \omega^2 (R_p + L \sin \alpha)$$

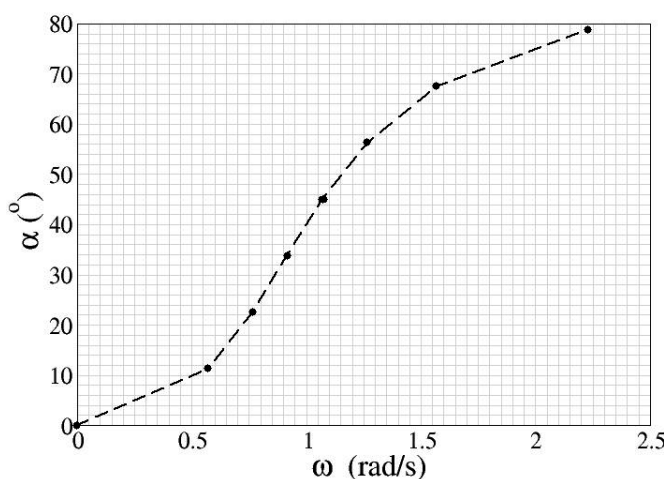
$$\rightarrow \omega^2 = \frac{g \tan \alpha}{R_p + L \sin \alpha} ,$$

como queríamos demostrar.



c) Los ocho valores de α pedidos (tanto en radianes como en grados), así como la velocidad angular ω a la que corresponden (según la ecuación obtenida en el apartado b), se indican en la tabla y se representan gráficamente en la figura:

α (rad)	α (°)	ω (rad/s)
0	0	0
$\pi / 16$	11,25	0,571
$2\pi / 16$	22,50	0,766
$3\pi / 16$	33,75	0,918
$4\pi / 16$	45,00	1,071
$5\pi / 16$	56,26	1,266
$6\pi / 16$	67,50	1,568
$7\pi / 16$	78,75	2,230



d) Como $\tan \alpha \rightarrow \infty$ cuando $\alpha \rightarrow \pi / 2$, entonces:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \omega = \infty ,$$

es decir, el máximo valor posible del ángulo es $\alpha = \pi / 2$.

Además, viendo el dibujo, se observa que si $\alpha > \pi / 2$, las componentes verticales de las fuerzas irían hacia abajo y no podría haber equilibrio.

e) Para $\alpha = 45^\circ$ el valor de la velocidad angular es $\omega = 1,071$ rad/s. Por tanto:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{1,071} = 5,87 \text{ s} .$$

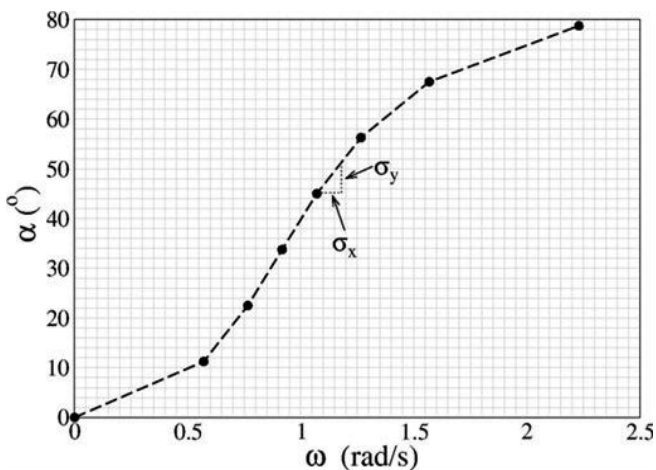
Por otro lado, el número total de vueltas, n , será el tiempo total, t , dividido entre el tiempo que tarda en dar una vuelta, es decir,

$$n = \frac{t}{T} = \frac{180}{5,87} = 30,66 \text{ vueltas}.$$

Y la distancia total recorrida, D , será el número de vueltas totales, n , por la distancia recorrida en cada vuelta, $2\pi r$:

$$D = n2\pi r = n2\pi(R_p + L \sin \alpha) = 30,66 \cdot 2\pi \cdot (5 + 5 \cdot \sin 45^\circ) = 1644 \text{ m}.$$

f) Sobre la figura obtenida en el apartado c, para el punto en $\alpha = 45^\circ$, nos desplazamos en horizontal una cantidad determinada por el error en la velocidad de giro, $\sigma_x = 0,1 \text{ rad/s}$. En el eje vertical, para el ángulo de elevación α , eso implica un error $\sigma_y \approx 7^\circ$. Se llega al mismo resultado haciendo la propagación de errores a partir de la expresión $\omega(\alpha)$ del apartado b:



$$\frac{d\omega}{d\alpha} = \frac{\omega^3 R_p + L \sin^3 \alpha}{2g \sin^2 \alpha} = 0,85 \rightarrow \delta\alpha = \frac{\delta\omega}{0,85} \approx 7^\circ.$$

g) Cuando está en reposo la tensión será simplemente $T = Mg$, luego la tensión máxima que puede soportar la cuerda es $T_{\max} = M_{\max} g$. Para un ángulo arbitrario, la relación entre la tensión y el ángulo era $Mg / \cos \alpha$ (ver apartado a). Por tanto, para una masa M determinada, el valor máximo del ángulo se alcanzará cuando

$$T_{\max} = \frac{Mg}{\cos \alpha_{\max}} \rightarrow \cos \alpha_{\max} = \frac{Mg}{M_{\max} g} = \frac{M}{M_{\max}}.$$

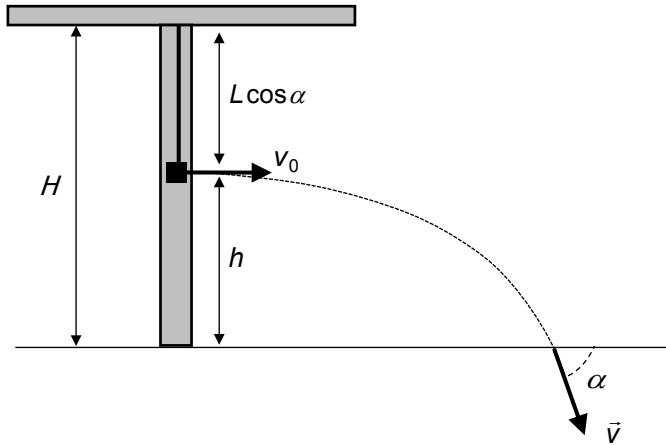
h) Si $M = 195 \text{ kg}$, el ángulo máximo sería, según el apartado anterior,

$$\cos \alpha_{\max} = \frac{195}{1000} = 0,195 \rightarrow \alpha_{\max} = 1,3745 \text{ rad} = 78,75^\circ.$$

que es precisamente uno de los puntos calculados en el apartado c, donde la velocidad angular es $\omega = 2,23 \text{ rad/s}$.

i) Cuando se rompe la cadena la masa está únicamente sometida a la acción de la gravedad, por lo que la situación cinemática corresponde a un tiro horizontal desde una altura

$$h = H - L \cos \alpha = 7 - 5 \cdot \cos 78,75^\circ = 6,02 \text{ m}.$$



En el instante inicial la velocidad solo tiene componente horizontal:

$$v_0 = \omega r = \omega(R_p + L \sin \alpha) = 2,23 \cdot (5 + 5 \cdot \sin 78,75^\circ) = 22,09 \text{ m/s} .$$

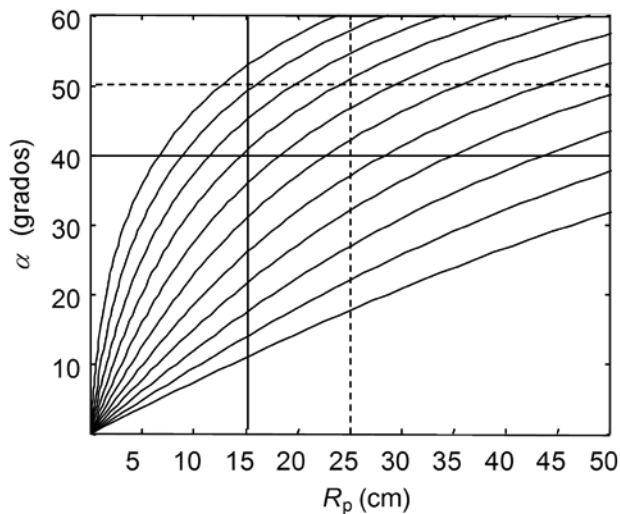
Como la fuerza de la gravedad solo afecta a la componente vertical, la velocidad con la que llega al suelo será

$$\vec{v} = (v_0, -\sqrt{2gh}) = (22,09, -10,86) \text{ m/s} .$$

Y, por tanto, el ángulo θ con el suelo cumple

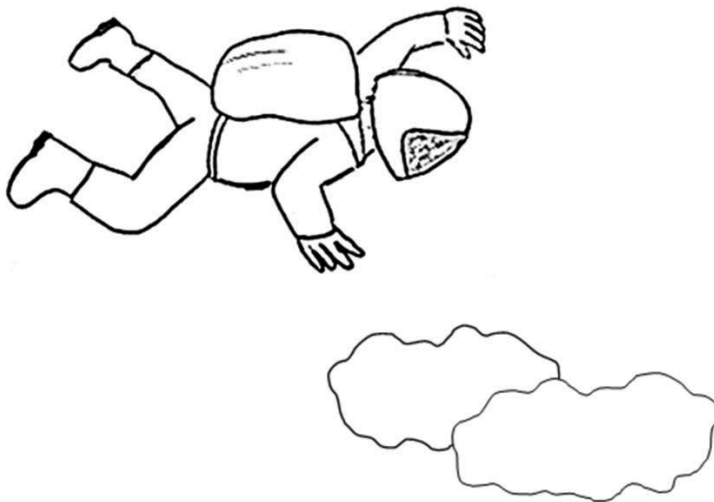
$$\tan \theta = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0} = \frac{10,86}{22,09} = 0,49 \rightarrow \theta = 26,2^\circ .$$

j) Si trazamos una línea horizontal en $\alpha = 40^\circ$ y una vertical en $R_p = 15 \text{ cm}$, vemos que se cortan en la curva correspondiente a la velocidad de 0,85 vueltas/s. Lo mismo ocurre para $\alpha = 50^\circ$ y $R_p = 25 \text{ cm}$. (Recuérdese que la curva de abajo corresponde a 0,5 vueltas/s y el resto van en incrementos de 0,05 vueltas/s).



29. Caída libre

Como probablemente sepas, pues creó expectación mundial, el 14 de octubre de 2012 Felix Baumgartner (de 70 kg de masa) batió el récord de altura en caída libre al lanzarse desde un globo aerostático desde una altura de 39 km. Su traje pesaba 30 kg. A los 42 segundos de iniciado el salto alcanzó una velocidad límite de 1342 km/h. (La velocidad límite es la máxima que alcanza un cuerpo en caída libre debido a la fuerza de rozamiento que ejerce el aire).



- a) ¿Cuánto vale la aceleración de la gravedad en el punto de salto en comparación con el valor en la superficie, en tanto por ciento? (Radio terrestre: 6371 km).
- b) Durante el tiempo que Baumgartner iba a la velocidad límite: ¿Cuánto valía la fuerza de rozamiento? ¿Cuánto calor por unidad de tiempo se estaba produciendo en la caída? (Considera la potencia disipada por la fuerza de rozamiento).
- c) Si en esa caída se hubiera roto el traje, y asumiendo que todo el calor generado lo absorbiera el cuerpo de Baumgartner, ¿cuánto tiempo habría tardado en alcanzar su cuerpo 100 °C? (Calor específico del cuerpo humano: 0,83 cal/g °C, 1 cal = 4,187 J).

Resolución

a) La fuerza de la gravedad que experimenta una masa m a una distancia r del centro de la Tierra es

$$F = G \frac{M_T m}{r^2}.$$

Por tanto, su aceleración será $a = F / m = GM_T / r^2$. A una altura h respecto de la superficie tendremos

$$a = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2},$$

y en la superficie:

$$g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2}.$$

Luego el cociente vale

$$\frac{a}{g_0} = \left(\frac{R_T}{R_T + h} \right)^2 = \left(\frac{6371}{6371 + 39} \right)^2 = 0,988 \rightarrow 98,8 \, \%.$$

b) A la velocidad límite el cuerpo se mueve, por definición, con velocidad constante. Por tanto, la fuerza de rozamiento, F_R , ha de ser igual y de sentido opuesto a la gravitatoria, pues la fuerza total debe ser nula:

$$F_R = mg = (m_{\text{hombre}} + m_{\text{traje}})g = (70 + 30) \cdot 9,8 = 980 \, \text{N}.$$

(Hemos utilizado el valor de g de la superficie pues, como hemos visto en el apartado anterior, la variación es muy pequeña).

El calor disipado por unidad de tiempo será igual a la potencia realizada por la fuerza de rozamiento, que es el producto de la fuerza por la velocidad:

$$\frac{Q}{t} = P_R = F_R v_{\text{límite}} = 980 \, \text{N} \times 1342 \, \text{km/h} \times \frac{1000 \, \text{m/km}}{3600 \, \text{s/h}} = 365,3 \, \text{kW}.$$

c) Utilizando la relación para el calor transferido a un cuerpo de masa m y calor específico c , debido a una variación de temperatura, ΔT , tendremos

$$P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{mc\Delta T}{\Delta t}.$$

Así, el tiempo necesario para alcanzar los $100 \, ^\circ\text{C}$, tomando el valor de la potencia calculado en el apartado anterior, sería

$$\Delta t = mc \frac{\Delta T}{P} = 0,83 \, \text{cal/g}^\circ\text{C} \times 4,187 \, \text{J/cal} \times 7 \cdot 10^4 \, \text{g} \cdot \frac{100 - 36,5 \, ^\circ\text{C}}{365,3 \cdot 10^3 \, \text{W}} = 42,3 \, \text{s}.$$

(Nótese que la variación de temperatura es desde la temperatura normal de un cuerpo humano, $36,5 \, ^\circ\text{C}$, hasta $100 \, ^\circ\text{C}$).

Saber más

Felix Baumgartner es un exmilitar y paracaidista austríaco. En esta misión realizó un salto supersónico desde la estratosfera batiendo varios récords, entre ellos el de romper la barrera del sonido durante el descenso en caída libre. Ascendió a la estratosfera en un globo inflado con helio y, tras la caída libre, descendió en paracaídas hasta la superficie terrestre.

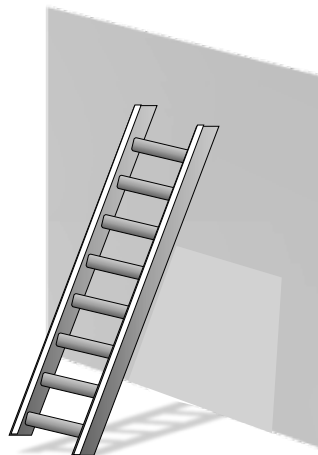
La misión tenía como objetivo estudiar el cuerpo humano en situaciones extremas, para lo cual se reunió a diversos especialistas en medicina aeroespacial e ingeniería de todo el mundo.

Web de la misión: <http://www.redbullstratos.com/>.

30. La escalera

a) ¿Por qué una escalera apoyada sobre una pared vertical lisa (sin rozamiento) y sobre un suelo rugoso (con rozamiento) puede mantenerse en equilibrio, pero no ocurre así si está apoyada sobre una pared rugosa y un suelo liso?

b) Considera un coeficiente estático de rozamiento, μ , entre la escalera y el suelo, y que la escalera forma un ángulo α con el suelo. Determina el ángulo de inclinación mínimo para que la escalera no deslice por el suelo.



Resolución

Dibujemos las fuerzas que actúan en el caso en que la pared es lisa y el suelo rugoso.

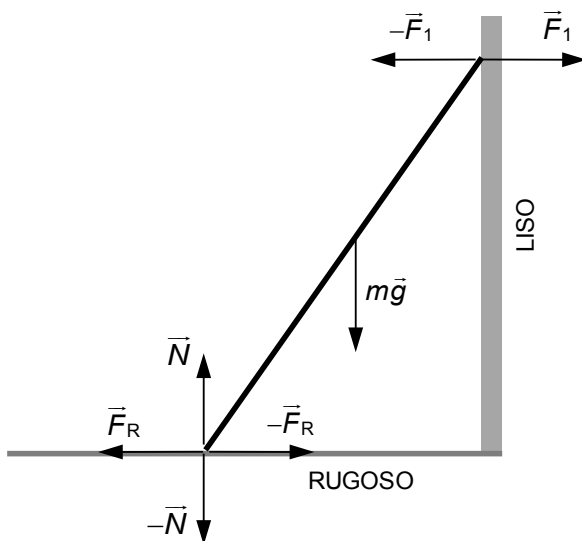
Las fuerzas que actúan sobre la escalera son

$\vec{P} = m\vec{g}$, la gravedad;

$\vec{F}_1$, la fuerza (horizontal) que ejerce la pared sobre la escalera (reacción normal de la pared);

$\vec{N}$, la fuerza (vertical) que ejerce el suelo sobre la escalera (reacción normal del suelo);

$\vec{F}_R$, la fuerza de rozamiento (horizontal), que es $-\vec{F}_R$ sobre la escalera.



En el equilibrio la suma de todas las fuerzas sobre la escalera ha de ser nula:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}.$$

a) Si la pared es lisa y el suelo rugoso, tanto las fuerzas verticales como horizontales se pueden compensar para cumplir la condición de equilibrio, ya que en la dirección vertical $\vec{N}$ compensaría a $m\vec{g}$, y en la horizontal $-\vec{F}_R$ compensaría a $\vec{F}_1$. Pero si el suelo es liso, no existe la fuerza de rozamiento del suelo, luego no hay manera de compensar la reacción horizontal $\vec{F}_1$ de la pared.

b) La fuerza neta debe ser cero, por tanto:

$$\begin{cases} N = mg \\ F_1 = F_R \end{cases}.$$

Y el momento neto también debe ser cero:

$$\sum \vec{M} \times \vec{r} = \vec{0}.$$

Tomamos los momentos respecto al extremo inferior de la escalera. La resultante de la fuerza de rozamiento y la fuerza normal del suelo realiza un momento nulo (pues se aplica en el punto de referencia). El momento que realiza la fuerza peso es

$$-mg \vec{j} \times \frac{L}{2} (\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}) = mg \frac{L}{2} \cos \alpha \vec{k}.$$

Y el momento que ejerce la reacción de la pared en el extremo superior es

$$-F_1 \vec{i} \times L (\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}) = -F_1 L \sin \alpha \vec{k}.$$

Como el momento total debe ser nulo se ha de cumplir

$$mg \frac{L}{2} \cos \alpha \vec{k} - F_1 L \sin \alpha \vec{k} = 0 \rightarrow \tan \alpha = \frac{mg}{2F_1} \rightarrow F_R = \frac{mg}{2 \tan \alpha}.$$

A medida que disminuye α la escalera se inclina cada vez más y la fuerza de rozamiento va aumentando.

La fuerza de rozamiento alcanza su valor máximo cuando $F_R = N\mu = mg\mu$. Por tanto, el ángulo por debajo del cual la escalera empieza a deslizar cumple

$$\tan \alpha_{\min} = \frac{mg}{2mg\mu} = \frac{1}{2\mu}.$$

Saber más

Podemos replantear el problema si, además del rozamiento con el suelo, existe también rozamiento con la pared. Considera que el coeficiente de rozamiento con el suelo es μ_{suelo} y que el coeficiente con la pared es μ_{pared} . Demuestra que el ángulo límite es

$$\tan \alpha_{\min} = \frac{1 - \mu_{\text{suelo}} \mu_{\text{pared}}}{2\mu_{\text{suelo}}}.$$

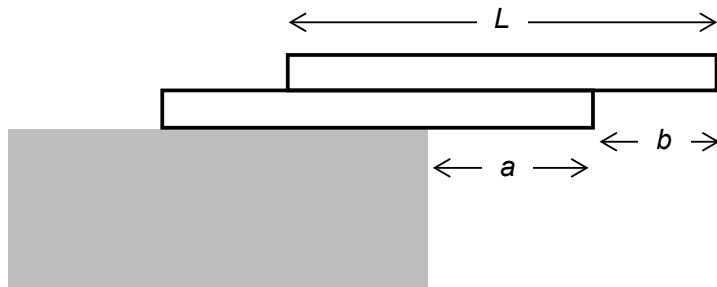
Plantea el problema considerando que una persona de masa M sube por la escalera (de masa m), en el caso de sólo fricción con el suelo (coeficiente μ). Analiza la situación de equilibrio en función de la distancia d que ha ascendido la persona sobre la escalera. Demuestra el siguiente resultado:

$$\tan \alpha_{\min} = \frac{1}{2\mu} \frac{\left(m + \frac{2M}{L}d\right)}{(m + M)}.$$

Si la persona está en la mitad inferior de la escalera se favorece que la escalera no deslice. Si la persona está a mitad, $d = L/2$, se reproduce el resultado obtenido cuando no hay ninguna persona, pues se cancelan las masas. Conforme la persona sube, el ángulo mínimo para que no deslice va siendo cada vez mayor.

31. Estabilidad y apilamiento de bloques

Se quiere construir un puente usando dos bloques idénticos uniformes rectangulares, de longitud L , que sobresalen de la mesa tal y como muestra la figura. El bloque inferior sobresale de la mesa una longitud a , y el bloque superior sobresale del inferior una longitud b . ¿Cuál es el valor máximo de a (dado b) para que la construcción sea estable?

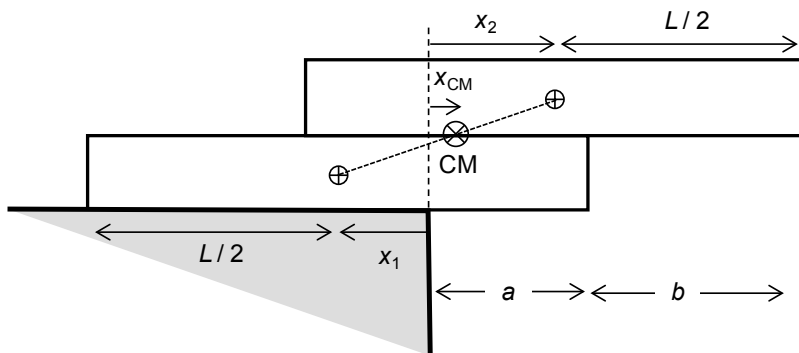


Resolución

Para que el sistema sea estable, la posición del centro de masas del sistema de dos bloques debe de estar sobre la mesa. Si tomamos el origen de posiciones en el borde de la mesa, la condición de equilibrio es

$$x_{CM} \leq 0.$$

Como los dos bloques son iguales, el centro de masas total estará en el punto medio del centro de masas de ambos bloques, los cuales, a su vez estaban en el punto medio de cada bloque. Véase la figura.



La posición del centro de masas del bloque inferior es $x_1 = a - L/2$.

La posición del centro de masas del bloque superior es $x_2 = x_1 + b = a + b - L/2$.

Es obvio que la primera condición que debe darse es que tanto a como b valgan como mucho $L/2$.

La posición del centro de masas del sistema de dos bloques resulta

$$x_{CM} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{(a - L/2) + (a + b - L/2)}{2} = \frac{2a + b - L}{2}.$$

Por tanto, para que $x_{CM} \leq 0$ se debe cumplir la condición

$$2a + b \leq L,$$

donde además a y b deben cumplir

$$a \leq L/2 \text{ y } b \leq L/2.$$

Varios ejemplos donde se produce el equilibrio son:

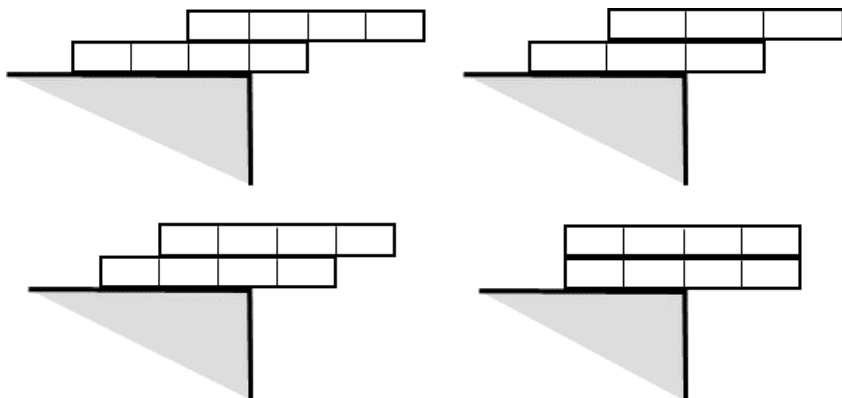
$$b = L/2 \rightarrow a \leq L/4,$$

$$a = b \leq L/3,$$

$$b = L/4 \rightarrow a \leq 3L/8,$$

$$a = L/2 \rightarrow b \leq 0 \text{ (el segundo bloque totalmente encima del primero).}$$

Las cuatro situaciones anteriores se muestran en su caso límite en la siguiente figura.

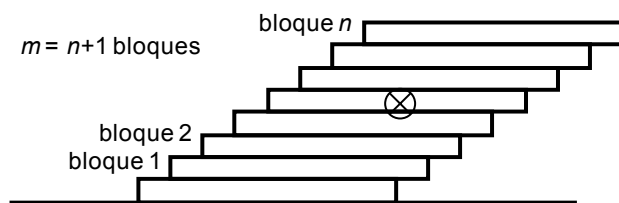


Comprobamos que el vuelo total del sistema sobre la mesa es máximo en el primer caso ($b = L/2$, $a = L/4$).

Como ejemplo numérico, si $L = 1$ m y $a = 30$ cm, hay equilibrio si $b \leq 40$ cm.

Saber más

Podemos plantearnos construir una torre inclinada con m bloques iguales, cada uno de ellos desplazado una distancia d respecto al anterior. ¿Cuál es el máximo valor de d para que la torre no vuelque?



Empezamos a numerar los bloques a partir del que está en la base (estable, totalmente apoyado sobre la mesa). Es decir, nuestro bloque número 1 sería en realidad el segundo. Las posiciones del centro de masas de cada bloque son

$$\begin{aligned}x_1 &= d - L/2 \\x_2 &= x_1 + d = 2d - L/2 \\x_3 &= x_2 + d = 3d - L/2 \\&\dots \\x_n &= x_{n-1} + d = nd - L/2.\end{aligned}$$

Entonces, la posición del centro de masas del sistema de n bloques es

$$x_{CM} = \frac{(d - L/2) + (2d - L/2) + (3d - L/2) + \dots + (nd - L/2)}{n} = \frac{d \sum_{i=1}^n i - nL/2}{n}.$$

Teniendo en cuenta la propiedad de las series $\sum_{i=1}^n i = n(n+1)/2$, queda

$$x_{CM} = \frac{(n+1)d - L}{2} = \frac{md - L}{2},$$

donde $m = n + 1$, ya que el bloque de la base es estable.

Imponemos la condición de equilibrio:

$$x_{CM} \leq 0 \rightarrow d \leq \frac{L}{m}.$$

Al mismo resultado se llega calculando el ángulo de inclinación de la torre:

$$\tan \alpha = \frac{nh}{nd} = \frac{h}{d},$$

donde h es la altura de cada bloque.

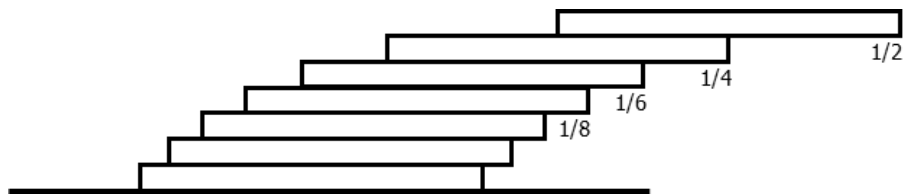
El centro de masas de los n bloques está situado a una altura $mh/2$ desde el centro del bloque base, luego teniendo en cuenta el ángulo su posición es $md/2$, desde el centro del bloque base, y $md/2 - L/2$ desde su extremo.

Por ejemplo, si queremos apilar 10 bloques de 1 m, podemos desplazarlos como mucho 10 cm uno respecto al otro.

La anterior forma de apilar bloques no es la óptima para conseguir el vuelo o voladizo más largo posible. El voladizo total máximo conseguido en la situación descrita es $D = nd = (m-1)L/m$ (es decir, 90 cm para una torre de 10 bloques de 1 m).

La situación óptima se consigue desplazando cada bloque una distancia distinta respecto al anterior (es decir, $d \neq \text{cte}$), de forma que los vuelos de los bloques sigan la serie armónica

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2n}.$$



Puede comprobarse que cada agrupación de bloques, desde el más alto hacia abajo, tiene su centro de masas en el borde del bloque inmediatamente inferior.

El voladizo total de n bloques será la suma

$$D = \frac{L}{2} + \frac{L}{4} + \frac{L}{6} + \dots + \frac{L}{2n} = \frac{L}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}.$$

Como la serie armónica es divergente, sorprendentemente podríamos añadir más y más bloques para conseguir un voladizo tan largo como quisiéramos. El problema es que cada vez los bloques deben estar más juntos y llega un momento en que apenas se gana distancia.

En la tabla se comparan los voladizos máximos (en cm) obtenidos con un desplazamiento constante entre bloques y con desplazamientos que siguen la serie armónica. Los cálculos se han hecho para bloques de 1 m.

Nº de bloques, m ($n = m - 1$)	Desplazamiento uniforme $D = \frac{m-1}{m} L$	Desplazamiento armónico $D = \frac{L}{2} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i}$
2	50,0	50,0
3	66,7	75,0
4	75,0	91,7
5	80,0	104,2
6	83,3	114,2
7	85,7	122,5
8	87,5	129,6
9	88,9	135,9
10	90,0	141,4

32. Oxford vs Cambridge

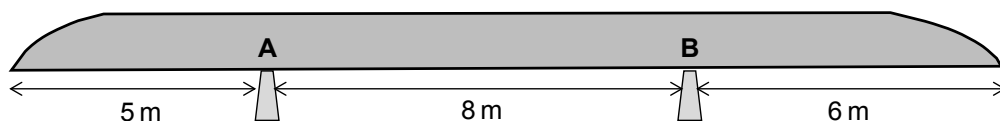
Los tripulantes que compiten en la carrera anual de piragüismo entre Oxford y Cambridge reman en una canoa larga y estrecha llamada *ocho*. En ciertas condiciones del río Támesis, algunas olas de pequeña amplitud pueden partir la canoa en dos. La canoa tiene 19 m de longitud y la profundidad del río es de 2,4 m.

a) Haz un dibujo representando la longitud de onda que es más probable que pueda partir la canoa en dos. ¿Cuál es el valor de esta longitud de onda?

b) Si la velocidad de las ondas es $v = \sqrt{gd}$, donde d es la profundidad del agua, calcula la frecuencia de las olas que provocarían la destrucción de la canoa.



Se quiere pesar la piragua usando únicamente una balanza de baño convencional. La piragua se puede combar peligrosamente si la apoyamos solo en el centro, así que la balanza se coloca primeramente en el punto A con un soporte de madera en el punto B, y luego en el punto B poniendo un soporte de madera en el punto A. Las lecturas de la balanza en ambas situaciones son 45 kg y 52 kg respectivamente.



c) Determina, de forma razonada, la masa de la piragua.

d) El recorrido de la regata tiene una longitud de 6,8 km (4,2 millas). El tiempo récord se consiguió en 1998 con 16 minutos y 19 segundos. Calcula la velocidad media.

Al avanzar por el agua, la canoa sufre una fuerza de fricción que es proporcional al cuadrado de la velocidad:

$$F = C v^2,$$

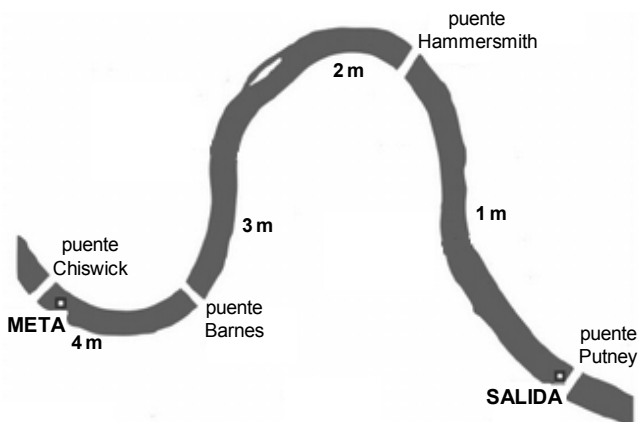
donde C es un coeficiente de resistencia. La fuerza del remo sobre el agua que

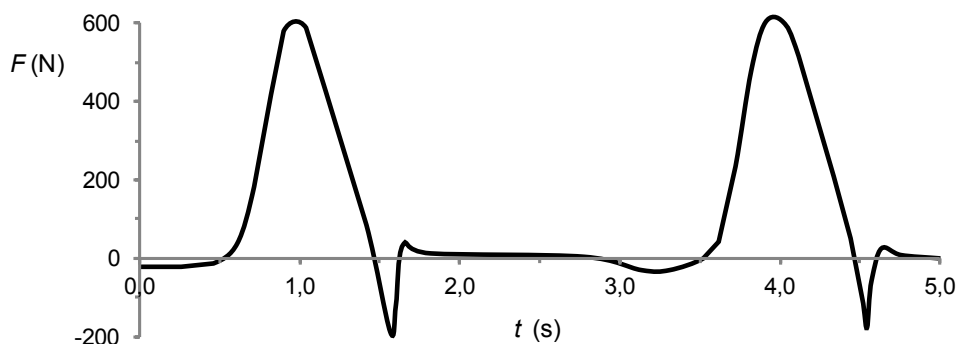
realiza cada uno de los ocho remeros viene representada en función del tiempo en la siguiente gráfica. A la vista de la gráfica, estima:

e) Cuánto vale la fuerza media realizada por cada remero.

f) El ritmo de remada (en paladas por minuto).

g) Utilizando la velocidad media obtenida en el apartado d, determina el valor del coeficiente de resistencia de la canoa con el agua.





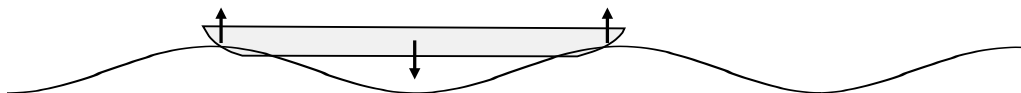
Nos preguntamos ahora por los aspectos energéticos de la carrera. Calcula:

h) La potencia desarrollada por los remeros.

i) La energía (en kcal) consumida por cada remero en toda la carrera. Datos: Sabemos que el cuerpo humano sólo transforma en trabajo mecánico un 25 % de la energía que consume. 1 cal = 4,187 J.

Resolución

a) La situación más desfavorable ocurre cuando el centro de la canoa sufre un par de fuerza mayor, según se representa en la figura:



La longitud de onda coincidirá con la longitud de la canoa: $\lambda = L = 19 \text{ m}$.

b) La frecuencia de las olas con velocidad $v = \sqrt{gd}$ es

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{\sqrt{gd}}{\lambda} = \frac{\sqrt{9,8 \cdot 2,4}}{19} = 0,255 \text{ Hz}.$$

c) Si pusiéramos dos balanzas en A y B a la vez marcarían lo mismo que la situación descrita en el enunciado (pues una balanza “no sabe” si en el otro punto hay una balanza o un taco de madera), y en ese caso la masa total sería la suma de las masas que marcan las dos balanzas. Por tanto, la masa total es

$$M = 45 + 52 = 97 \text{ kg}.$$

d) La velocidad media el año del récord fue

$$v = \frac{d}{t} = \frac{6779}{16 \cdot 60 + 19} = 6,9 \text{ m/s} = 24,9 \text{ km/h}.$$

e) El valor medio de la fuerza lo podemos calcular tomando el intervalo de tiempo desde 0,5 hasta 3,5 s. En ese intervalo de 3 s el área de la curva es aproximadamente la de un triángulo, de forma que

$$\overline{F} = \frac{1}{3} \int_{0,5}^{3,5} F(t) dt \approx \frac{1}{3} \times \frac{1 \text{ s} \times 600 \text{ N}}{2} = 100 \text{ N}.$$

f) Cada ciclo de fuerza máxima en la gráfica corresponde a una palada. Se da una cada 3 s, por tanto, el ritmo de remada es de 20 paladas por minuto.

g) Según la expresión del enunciado, la fuerza de fricción es $F = C v^2$, que se opone a la fuerza total que realizan los 8 remeros, pues se avanza a velocidad aproximadamente constante (sin aceleración). Entonces, despejamos el coeficiente:

$$F_{\text{remeros}} = 8 \cdot 100 \text{ N} = C \cdot 6,9^2 \rightarrow C = 16,8 \text{ kg/m}.$$

h) Utilizando el valor de la fuerza media y de la velocidad media durante la carrera, la potencia desarrollada por cada remero es

$$P = F v = 100 \cdot 6,9 = 690 \text{ W}.$$

(Como $1 \text{ CV} = 745,7 \text{ W}$, la potencia de propulsión de toda la canoa es equivalente a la de un motor de unos 7 caballos y medio).

i) El trabajo es el producto de la fuerza por la distancia:

$$W = F d = 100 \cdot 6779 = 677,9 \text{ kJ}.$$

Como sólo el 25 % del gasto energético del cuerpo se emplea en trabajo mecánico (el resto es en calor y el propio metabolismo), cada remero habrá consumido 4 veces la energía anterior, que pasada a kilocalorías es

$$4 \cdot 677900 \text{ J} = 648 \text{ kcal}.$$

Saber más

Página oficial de la competición: <http://www.theboatrace.org/>.

Información sobre el río Támesis (profundidad, caudal, mareas, etc.): <http://www.the-river-thames.co.uk/>.

33. Energía por el sistema solar

Las distancias medias desde el Sol a la Tierra, Saturno y Mercurio son $1,49 \times 10^8$ km, $1,43 \times 10^9$ km y $5,79 \times 10^7$ km, respectivamente. Los diámetros son 12 756 km, 120 536 km y 4879 km, para la Tierra, Saturno y Mercurio, respectivamente.

¿Cuánta energía solar recibe más, o menos, nuestro planeta que Saturno y que Mercurio?

¿Y Neptuno?, que está 30 veces más lejos que la Tierra y es unas 4 veces más grande.

Resolución

La energía llega del Sol en forma de ondas electromagnéticas esféricas y, por eso, la energía por unidad de área que, en un tiempo dado, llega a una región que está a una distancia d del Sol es inversamente proporcional a d^2 .

Así, la energía por unidad de área que recibe la Tierra es

$$(14,3 / 1,49)^2 = 92,1 \text{ veces mayor que la que recibe Saturno,}$$

$$(0,579 / 1,49)^2 = 0,15 \text{ veces la que recibe Mercurio.}$$

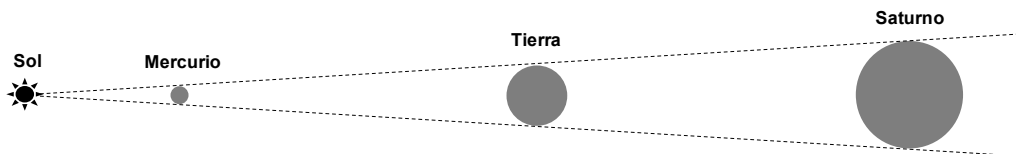
Sin embargo, contando toda la superficie de los planetas, la energía total que reciben los tres planetas es casi la misma. Ello es debido a que el diámetro de Saturno es 9,5 veces mayor que el de la Tierra, un factor similar al cociente 9,6 de distancias al Sol; y el diámetro de la Tierra es 2,6 mayor que el de Mercurio, que es el mismo factor que el cociente de distancias al Sol. O bien, Saturno es 24,7 veces más grande que Mercurio y está a 24,7 veces más distancia.

Matemáticamente:

$$P_{\text{planeta}} = I \cdot S_{\text{planeta}} \propto \frac{R_{\text{planeta}}^2}{d^2} \rightarrow \frac{14,3}{12,0536} \approx \frac{1,49}{1,2756} \approx \frac{0,579}{0,4879} \approx 1,4.$$

Este hecho es casual. Para otros planetas del Sistema Solar no se da esa misma proporción.

En la figura las distancias no están a escala real. Sólo se ha ilustrado el hecho de que los cocientes de los diámetros entre las distancias al Sol son aproximadamente iguales en estos tres casos.

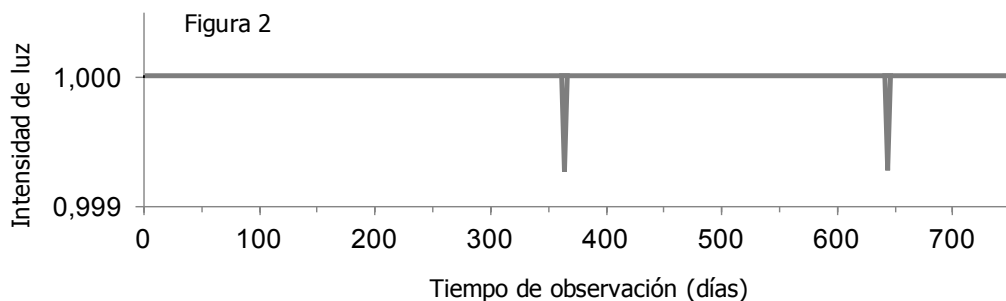
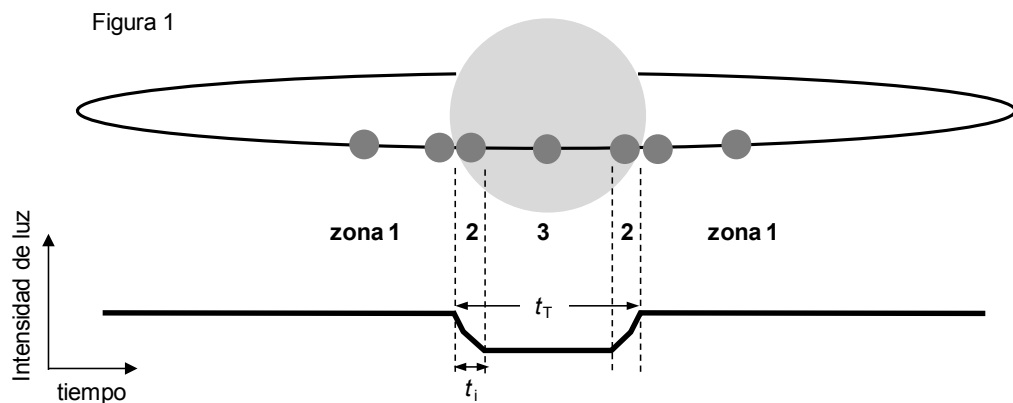


En el caso de Neptuno, recibe mucha menos energía que los otros tres, pues está 30 veces más lejos que la Tierra pero no es 30 veces más grande.

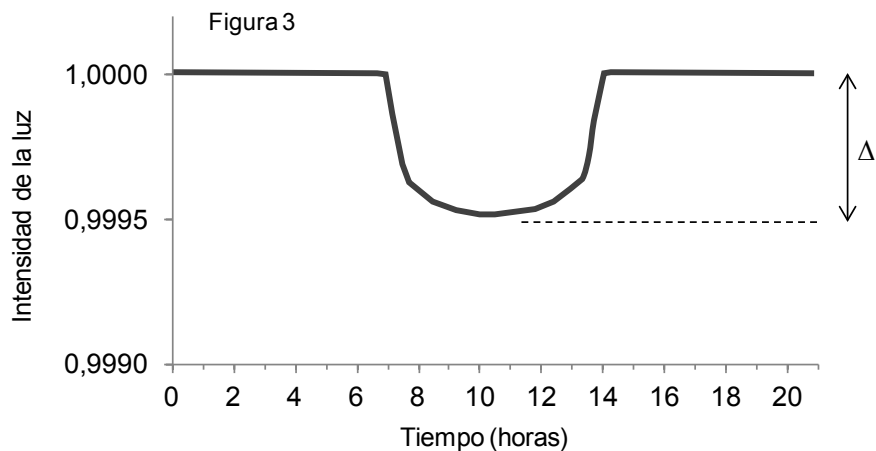
34. Cazando exoplanetas

En marzo de 2009 se lanzó al espacio el telescopio Kepler, destinado a la búsqueda de planetas fuera de nuestro sistema solar (*exoplanetas*). El método utilizado se basa en la disminución de la intensidad luminosa que recibimos de una estrella cuando la órbita de un planeta de su sistema planetario pasa por delante de dicha estrella eclipsándola parcialmente según se ve desde la Tierra. Este tránsito provoca una disminución periódica en el brillo de la estrella que nos llega, que puede medirse mediante técnicas fotométricas, es decir, que miden la cantidad de luz proveniente de los objetos celestes. Como puedes imaginar el efecto es muy débil, pero es suficiente para ser medido gracias a los avanzados instrumentos del observatorio espacial Kepler. Solamente los planetas que en su órbita crucen la línea visual entre la estrella y la Tierra podrán ser detectados por este método. Hasta el final de la misión, en 2013, el telescopio Kepler descubrió más de 2700 posibles exoplanetas, algunos de los cuales tienen características que podrían ser compatibles con la vida. Este problema trata de uno de esos posibles planetas habitables (el primero en ser descubierto, en 2011): el planeta Kepler-22b, que orbita la estrella Kepler-22.

En la figura 1 se representa un esquema del proceso, en el que se pueden distinguir tres zonas: en la zona 1 el planeta no eclipsa a la estrella y la intensidad de luz recibida es la habitual de la estrella. La zona 2, llamada *zona de ingreso*, transcurre desde que el planeta comienza a tapar la estrella hasta que todo el planeta queda por delante de la estrella. En la zona 3 todo el planeta eclipsa a la estrella y dura hasta que el planeta comienza a salir de la proyección del círculo de la estrella. Todo el proceso en el que alguna parte del planeta eclipsa a la estrella se le llama *tránsito*.



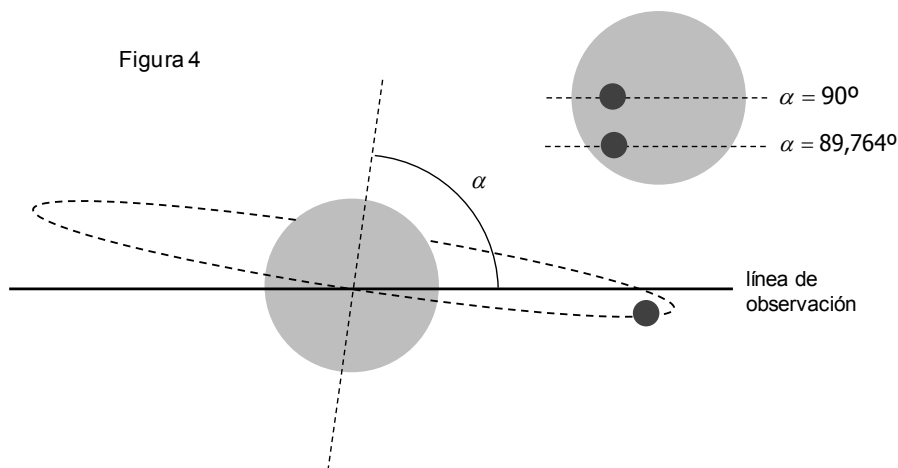
En la figura 2 se representa la curva de luz para la estrella Kepler-22 y su planeta identificado Kepler-22b. Los dos picos indican sendos tránsitos de dicho planeta. En la figura 3 se ha hecho un zoom de uno de estos tránsitos.



Consideraremos que la órbita es prácticamente circular. En la curva de luz experimental (figura 3) la intensidad se ha representado normalizada al valor que toma en la zona 1, es decir, la intensidad relativa es la intensidad recibida en el detector del telescopio dividida por el valor que toma en la zona 1. Para Kepler-22b el tiempo de ingreso, t_i , es demasiado pequeño y podemos despreciarlo, es decir, todo el tránsito representado corresponde a la fase 3.

Por métodos astrofísicos se ha estimado que la masa de la estrella Kepler-22 es 0,97 veces la masa del Sol. Se cree que la masa del planeta Kepler-22b es igual a unas 36 masas terrestres. Datos: $G = 6,67 \times 10^{-11}$ [SI], radio del Sol = $6,95 \times 10^5$ km, masa del Sol = 2×10^{30} kg, radio de la Tierra = 6371 km, masa de la Tierra = $5,97 \times 10^{24}$ kg.

a) Extrayendo la información que consideres oportuna de la figura 2, determina: el período orbital del planeta, T , la distancia, a , del planeta a la estrella (radio orbital) en unidades astronómicas (UA), y la velocidad orbital del planeta, v_{orb} . (La unidad astronómica es la distancia media de la Tierra al Sol: $1 \text{ UA} = 149,6 \times 10^6 \text{ km}$.)



b) A partir de datos de la figura 3, determina el radio de la estrella, R_s , comparado con el radio del Sol (desprecia en los cálculos el radio del planeta frente al de la estrella). Considera dos situaciones (ver figura 4): la aproximación de que el tránsito discurre por la zona media de la estrella, es decir que recorre su diámetro máximo; y la situación real en que el tránsito que vemos pasa por una línea paralela al diámetro de la estrella debido a que la órbita de Kepler-22b está inclinada respecto al eje de observación desde la Tierra, con un ángulo de inclinación $\alpha = 89,764^\circ$ entre la normal al plano orbital y nuestro eje de observación.

c) Un cuerpo caliente que está a una temperatura T emite energía en forma de radiación electromagnética, en el caso de una estrella mayoritariamente en forma de luz. La potencia emitida, P , por unidad de área, A , viene dada por una ley llamada ley de Stefan-Boltzmann:

$$P / A = \sigma T^4,$$

donde σ es una constante universal cuyo valor es $\sigma = 5,67 \times 10^{-8}$ [SI]. Realizando un análisis espectral de la luz de la estrella se sabe que la temperatura superficial de la estrella Kepler-22 es 5518 K. Para esa estrella, en el detector del telescopio Kepler se registra una potencia por unidad de superficie del detector de $0,7 \times 10^{-12}$ W/m².

i) ¿A qué distancia, d , de nosotros (en años luz) se encuentra la estrella Kepler-22? (Un año luz se define como la distancia que recorre la luz en un año).

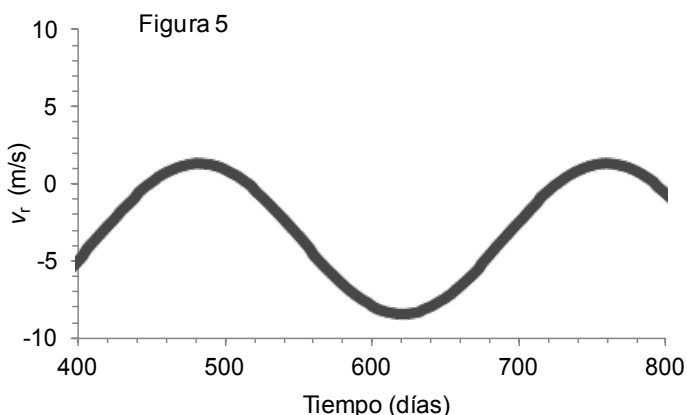
ii) Demuestra que la pérdida de intensidad relativa (Δ en figura 3) es $\Delta = (R_p / R_s)^2$, donde R_p es el radio del planeta.

iii) Calcula el radio del planeta, R_p , la densidad del planeta, ρ_p , y la aceleración de la gravedad en su superficie, g_p .

iv) Calcula la potencia luminosa por unidad de área que recibe Kepler-22b y compáralo con el valor en la Tierra, que es de 1000 W/m².

v) En vista de los resultados que has obtenido ¿crees que Kepler-22b podría ser habitable?

c) Como sabes, la estrella y el planeta giran respecto del centro de masas común. Estudiando el desplazamiento por efecto Doppler del espectro de la estrella se ha determinado la velocidad radial de la estrella en función del tiempo, es decir, la componente de la velocidad de la estrella en la dirección de la visual con la Tierra, v_r . Su valor viene dado por la línea de puntos de la figura 5. A partir de esa figura, ¿podrías estimar la velocidad de la estrella, v_s , en su movimiento de rotación respecto del centro de masas? ¿Qué crees que puede significar que la oscilación de la figura no tiene como valor medio el 0?



Resolución

a) El período orbital del planeta será el tiempo transcurrido entre dos tránsitos consecutivos. Leyendo directamente de la figura 2 tenemos que $T = 289$ días.

Sabiendo el período orbital podemos deducir la distancia, a , del planeta a la estrella utilizando la 3ª ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3.$$

Despejamos la distancia, sabiendo que la masa de la estrella es 0,97 masas solares:

$$a = \sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2} T^2} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (0,97 \cdot 2 \cdot 10^{30})}{4\pi^2} \cdot (289 \cdot 24 \cdot 3600)^2} = 1,27 \times 10^{11} \text{ m}.$$

que convertida a unidades astronómicas es

$$a = \frac{1,27 \cdot 10^{11} \text{ m}}{149,6 \cdot 10^9 \text{ m/UA}} = 0,85 \text{ UA}.$$

La velocidad orbital la podemos obtener sabiendo el periodo, T , y el radio orbital, a , que acabamos de calcular:

$$v_{\text{orb}} = \frac{2\pi a}{T} = \frac{2\pi \times 1,27 \cdot 10^{11} \text{ m}}{289 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}} = 31,9 \text{ km/s}.$$

b) A partir de la figura 3 determinamos que el tiempo de tránsito es aproximadamente $t_T = 7,4$ h.

▪ Sin inclinación orbital ($\alpha = 0$): En el tránsito, despreciando el radio de Kepler-22b, el planeta ha recorrido una distancia igual al diámetro de la estrella, es decir, $2R_s$, donde R_s es el radio de la estrella Kepler-22. Por tanto,

$$v_{\text{orb}} = \frac{2R_s}{t_T} \rightarrow R_s = \frac{v_{\text{orb}} t_T}{2} = \pi a \frac{t_T}{T} = \frac{31900 \text{ m/s} \times 7,4 \cdot 3600 \text{ s}}{2} = 4,25 \times 10^8 \text{ m}.$$

Y el radio de la estrella en radios solares es

$$R_s = \frac{4,25 \cdot 10^8}{6,95 \cdot 10^8} = 0,6 R_{\text{Sol}}.$$

▪ Situación real ($\alpha = 89,764^\circ$): Durante el tiempo de tránsito el planeta ya no recorre la distancia ecuatorial $2R_s$, sino una distancia $2x$ donde el valor de x es (ver figura 4 y utilizar la geometría de una circunferencia):

$$x = R_s \sqrt{1 - \left(\frac{a}{R_s} \cos \alpha \right)^2} = \sqrt{R_s^2 - a^2 \cos^2 \alpha}.$$

Por tanto, de la velocidad orbital se obtiene ahora para el radio de la estrella:

$$v_{\text{orb}} = \frac{2\pi a}{T} = \frac{2x}{t_T} = \frac{2\sqrt{R_s^2 - a^2 \cos^2 \alpha}}{t_T} \rightarrow R_s = a \sqrt{\left(\pi t_T / T \right)^2 + \cos^2 \alpha} = 6,74 \times 10^8 \text{ m}.$$

$$R_s = \frac{6,74 \cdot 10^8}{6,95 \cdot 10^8} = 0,97 R_{\text{Sol}} \approx R_{\text{Sol}},$$

que es el valor que los científicos han determinado para Kepler-22.

c) Varios subapartados:

i) La potencia total emitida por la estrella (también llamada luminosidad), por la ley de Stefan-Boltzmann, será $P_s = 4\pi R_s^2 \sigma T^4$, pues su radio es R_s . Y la intensidad que llega (potencia por unidad de superficie) a una distancia d de la estrella es $I = P_s / 4\pi d^2$. Luego la distancia a la Tierra es

$$d = \sqrt{\frac{4\pi R_s^2 \sigma T^4}{4\pi I}} = R_s T^2 \sqrt{\frac{\sigma}{I}} = 6,74 \cdot 10^8 \cdot 5518^2 \cdot \sqrt{\frac{5,67 \cdot 10^{-8}}{0,7 \cdot 10^{-12}}} = 5,84 \times 10^{18} \text{ m}$$

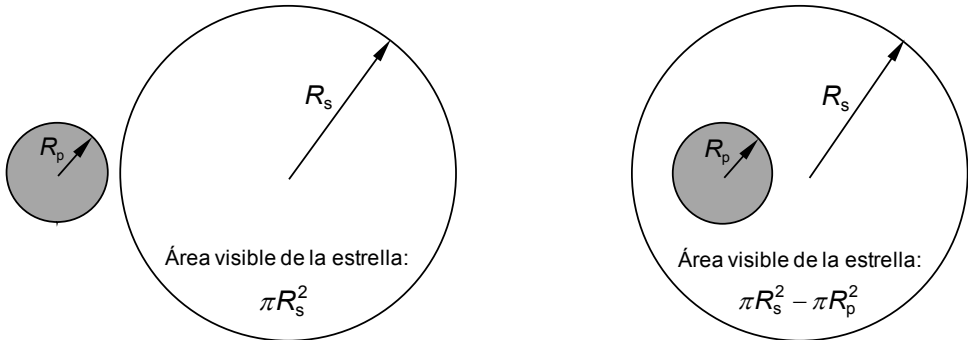
$$= 617 \text{ años luz}.$$

ii) La potencia efectiva será proporcional al área efectiva de la estrella, es decir al área que vemos de la estrella. Por tanto, cuando el planeta no oculta nada de la estrella se tiene

$$P_1 = \pi R_s^2 \sigma T^4.$$

Sin embargo, cuando el planeta está por delante de la estrella, su área efectiva se reduce en una cantidad igual al área que ocupa el planeta, por lo que la potencia efectiva será

$$P_2 = (\pi R_s^2 - \pi R_p^2) \sigma T^4.$$



Por tanto, la pérdida relativa de potencia, y de intensidad, que nos llega será

$$\Delta = \frac{P_1 - P_2}{P_1} = \frac{R_s^2 - (R_s^2 - R_p^2)}{R_s^2} = \left(\frac{R_p}{R_s} \right)^2.$$

iii) Con la expresión obtenida en el apartado anterior y el radio de la estrella obtenido previamente, podemos deducir el radio del planeta utilizando el valor $\Delta = 0,0005$ que se obtiene de la figura 3:

$$R_p = \sqrt{\Delta} R_s = 6,74 \cdot 10^8 \cdot \sqrt{0,0005} = 1,51 \times 10^7 \text{ m} \approx 2,4 R_{\text{Tierra}}.$$

Con ello, y sabiendo la masa del planeta, podemos hallar su densidad como

$$\rho_p = \frac{M_p}{\frac{4}{3}\pi R_p^3} = \frac{36 \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{\frac{4}{3}\pi \cdot (15,1 \cdot 10^6)^3} = 1490 \text{ kg/m}^3 = 1,5 \text{ g/cm}^3.$$

Y la aceleración de la gravedad es

$$g_p = \frac{GM_p}{R_p^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 36 \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{(15,1 \cdot 10^6)^2} = 62,9 \text{ m/s}^2.$$

iv) En el apartado i hemos indicado que la potencia total emitida por la estrella es

$$P_s = 4\pi R_s^2 \sigma T^4 = 4\pi \cdot (6,74 \cdot 10^8)^2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 5518^4 = 3 \times 10^{26} \text{ W}.$$

A una distancia a de la estrella, la intensidad es

$$I = \frac{P_s}{4\pi a^2} = \frac{3 \cdot 10^{26}}{4\pi \cdot (1,27 \cdot 10^{11})^2} = 1480 \text{ W/m}^2.$$

v) La intensidad luminosa es casi igual que la que recibimos en la Tierra del Sol: 1366 W/m^2 en la parte externa de la atmósfera. La densidad es lo suficientemente alta como para que el planeta sea sólido, al menos en parte (la densidad de la Tierra es $5,5 \text{ g/cm}^3$ y la del agua 1 g/cm^3). Pero el valor de la gravedad obtenido es demasiado alto para que un ser humano lo pudiera soportar, pues es $62,9/9,8 = 6,4$ veces la gravedad terrestre. Aunque podría ser habitable por otra forma de vida que se hubiera adaptado evolutivamente (u organismos microscópicos como bacterias, virus, etc.).

c) El punto máximo de la curva corresponde al instante en que la estrella se mueve justo en la dirección de la visual con la Tierra y en sentido hacia la Tierra, mientras que el mínimo corresponde a la situación en que se mueve en la dirección de la visual con la Tierra y sentido alejándose de la Tierra. La velocidad nula respecto del centro de masas correspondería al punto medio de la oscilación que sería cuando se mueve perpendicular a la Tierra. Por tanto, su velocidad respecto del centro de masas corresponde a la amplitud del movimiento, es decir la mitad de la distancia entre el máximo y el mínimo, que, a partir de la gráfica, encontramos que vale

$$v_s = \frac{1,8 - (-9)}{2} = 5,4 \text{ m/s}.$$

Que el valor medio no sea cero significa que el centro de masas se está moviendo respecto de nosotros. De hecho, lo hace con una velocidad

$$v_{CM} = \frac{1,8 + (-9)}{2} = -3,6 \text{ m/s}.$$

Saber más

Página web de la misión Kepler: https://www.nasa.gov/mission_pages/kepler/.

Lista y archivo de datos de exoplanetas: <https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/> y https://en.wikipedia.org/wiki/Lists_of_exoplanets.

Artículo con los descubrimientos del planeta Kepler-22b:

Borucki, W.J. et al. (2012). "Kepler-22b: A 2.4 Earth radius planet in the habitable zone of a sunlike star". *Astrophysical Journal* 745(12), pp. 1-16.

El telescopio Kepler finalizó su misión el 15 de noviembre de 2018 tras agotarse el combustible necesario para hacer pequeñas correcciones de órbita. Hasta el final de su vida Kepler detectó por el método del tránsito casi 6000 candidatos a exoplanetas de los cuales 2740 han sido confirmados. Esto permite extrapolar los datos e inferir que: la mayoría de estrellas tienen un sistema planetario, y que hay más planetas que estrellas. Además, entre un 20 y un 50 % de las estrellas tienen planetas pequeños, posiblemente rocosos, en la *zona de habitabilidad* de la estrella (*zona de habitabilidad* es la región alrededor de la estrella en que la radiación estelar es compatible con la presencia de agua líquida en un posible planeta que la tuviera; no confundir con que el planeta sea habitable y ni mucho menos con que esté habitado). También se ha visto que hay una gran diversidad en el tipo de sistemas planetarios, desde sistemas con planetas pequeños de pocas veces el tamaño de nuestra luna, a sistemas con planetas hasta 30 veces mayores que Júpiter; y desde sistemas con órbitas menores que la de Mercurio a órbitas mucho mayores que nuestro Sistema Solar.

Aunque el telescopio Kepler ha descubierto la mayoría de los exoplanetas conocidos, hay otros cientos descubiertos por otros telescopios y por otros métodos, como el de la velocidad radial basado en un principio parecido al descrito en el apartado c) del problema propuesto. De hecho, los dos planetas más cercanos se descubrieron por el método de la velocidad radial. El más cercano se llama Próxima b y está alrededor de la estrella más cercana, Alpha Centauri (a 4 años-luz). Los valores de su radio y su masa se estima que son comparables a los de Tierra, y se cree que estaría en la zona de habitabilidad de la estrella, aunque probablemente no sea habitable porque Alpha Centauri es una enana roja que emite muchos rayos X. La segunda estrella más cercana, Barnard (a 6 años luz) también se cree, desde noviembre de 2018, que tiene un exoplaneta (llamado Barnard-b) de una masa de al menos unas 3 veces la de la Tierra.

Artículo sobre Barnard-b:

Ribas, I., Tuomi, M., Reiners, A. et al. (2018). "A candidate super-Earth planet orbiting near the snow line of Barnard's star". *Nature* 563, pp. 365-368.

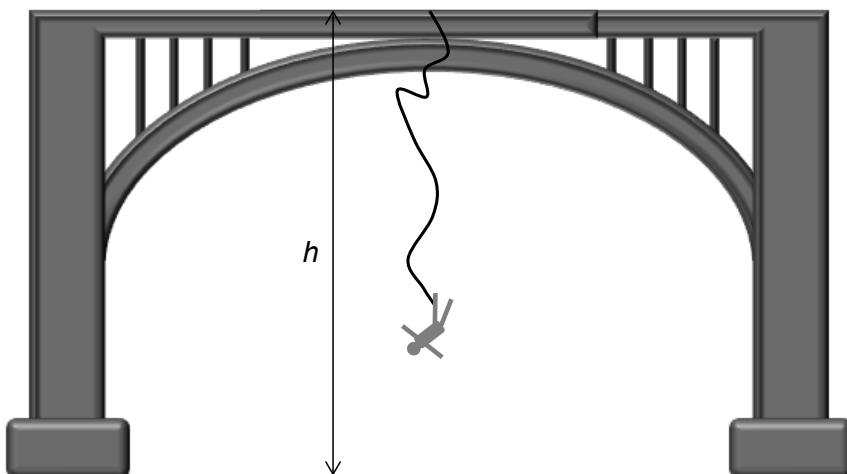
35. Vámonos de *puenting*

Como probablemente sabrás el *puenting* es una actividad de riesgo consistente en dejarse caer desde un puente atado por los tobillos a un extremo de una cuerda elástica cuyo otro cabo está sujeto al puente. La elasticidad de la cuerda hace que el saltador se frene suavemente, o al menos eso deseamos.

Consideremos que el puente tiene una altura $h = 100$ m desde donde salta el saltador, de 70 kg de masa, hasta el río que pasa por debajo. La cuerda tiene una longitud en ausencia de fuerzas externas que llamaremos L_0 . Podemos aproximar el salto en dos fases:

1ª El saltador se deja caer con una velocidad inicial nula y la cuerda no hace ningún efecto hasta que el saltador ha recorrido una distancia L_0 desde el puente.

2ª La cuerda comienza a frenar al saltador hasta detener la caída, preferiblemente antes de que éste llegue al agua si no queremos tener una desgracia. En esta segunda fase consideraremos que la cuerda sigue la ley de Hooke, es decir, se comporta como un muelle ideal de constante k . Consideraremos al saltador como una masa puntual y que no hay rozamiento con el aire.



a) Realiza un esquema de la caída, representando las fuerzas que actúan sobre el saltador en cada fase.

b) Obtén una expresión para la longitud máxima que alcanza la cuerda en función de L_0 y de k .

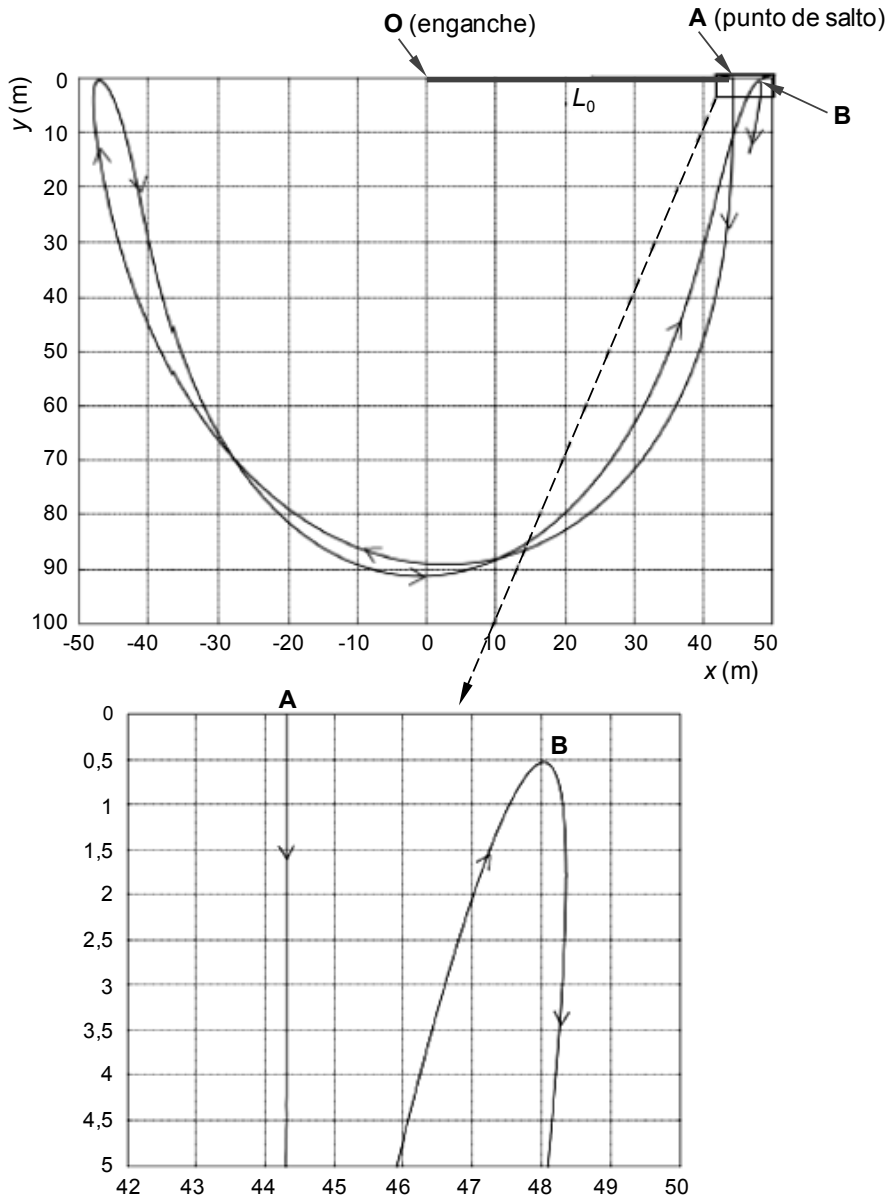
c) La dependencia de la constante k de la cuerda con la longitud L_0 viene dada por la función $k(L_0) = a / L_0$, donde a es una constante que vale 1960 N. Demuestra que el valor máximo para la longitud L_0 de la cuerda que podemos tomar para que el saltador no choque contra el agua es 44,3 m.

Considera en lo que sigue que nuestro saltador temerario utiliza una cuerda de exactamente la longitud indicada en el apartado anterior (es decir, el saltador quedará a punto de tocar el agua).

d) Representa gráficamente la aceleración en función de la posición (toma como origen de coordenadas el punto en que se inicia el salto y positivo el eje hacia abajo).

Considerando que las aceleraciones sufridas por el cuerpo humano mayores de $4g$ pueden ser muy peligrosas para la salud, contesta si se alcanza esta condición de peligro en algún punto.

e) El saltador ha comprobado que el enganche de la cuerda con el puente se ha deteriorado y está en una situación crítica. No volverá a aguantar otro salto si el enganche sufre la misma fuerza máxima que en el salto anterior. Decide entonces probar una variante distinta del *puenting* porque cree que así la fuerza máxima que sufrirá el enganche será menor. Para ello se deja caer desde un punto del puente, A en la figura de abajo, situado a una distancia L_0 del punto de fijación de la cuerda al puente, O. en la figura de abajo, situado a una distancia L_0 del punto de fijación de la cuerda al puente, O.



El movimiento seguido en el salto se inscribe obviamente en un plano, pero no es circular pues la cuerda se puede estirar. De hecho, el movimiento real es bastante complicado y ni siquiera es periódico en general. En la figura se representa la trayectoria $y(x)$ desde que se deja caer el saltador hasta el punto más alto que alcanza en su movimiento cerca del punto de partida, punto B en el dibujo.

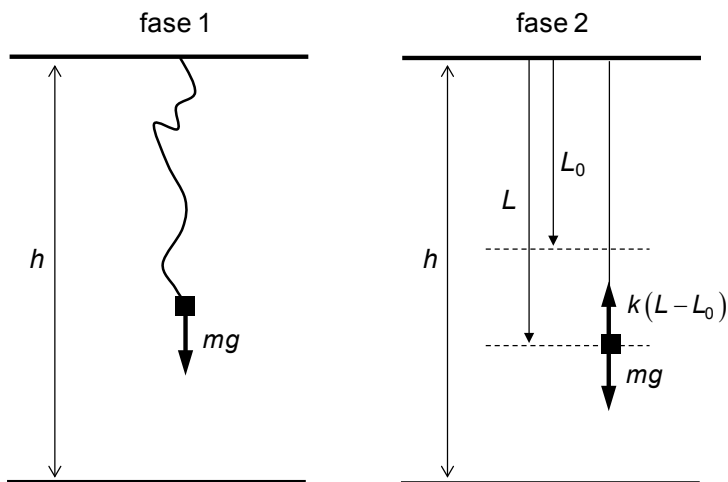
i) ¿Tenía razón el saltador, es decir, aguantará el enganche?

ii) En el punto B de casi retorno al punto inicial, el saltador no alcanza por poco la misma cota que desde la que saltó. Explica cómo es esto posible si se conserva la energía, y estima (usando éste y otros datos que consideres oportuno extraer de las gráficas) el valor del módulo de la velocidad en el punto B.

Resolución

a) En la fase 1 solo actúa la fuerza de la gravedad.

La fase 2 comienza cuando $L = L_0$. Además de la gravedad actúa la fuerza recuperadora elástica que sigue la ley de Hooke $F = k(L - L_0)$, con sentido hacia arriba.



b) Aplicamos la conservación de la energía. En el momento del salto la energía mecánica inicial es nula:

$$E_0 = E_{c0} + E_{p0} = 0,$$

pues no hay velocidad inicial y podemos tomar el punto de salto como origen de energía potencial gravitatoria.

En el punto inferior la energía total será suma de la potencial gravitatoria y de la potencial elástica (de nuevo la velocidad en ese punto será nula):

$$E = E_c + E_p = 0 - mgL_{\max} + \frac{1}{2}k(L_{\max} - L_0)^2.$$

Por conservación de la energía mecánica ambas energías han de ser iguales. Por tanto,

$$-mgL_{\max} + \frac{1}{2}k(L_{\max} - L_0)^2 = 0,$$

de donde podemos despejar $L_{\max}$ tras resolver una ecuación de segundo grado y quedarnos con la solución positiva:

$$L_{\max} = L_0 + \frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + 2L_0 \frac{k}{mg}} \right).$$

c) A partir de la expresión anterior, tomamos la dependencia indicada en el enunciado: $k = a / L_0$, y despejamos L_0 en función de $L_{\max}$:

$$L_0 = \frac{L_{\max}}{1 + \frac{mg}{a} \left(1 + \sqrt{1 + 2 \frac{a}{mg}} \right)}.$$

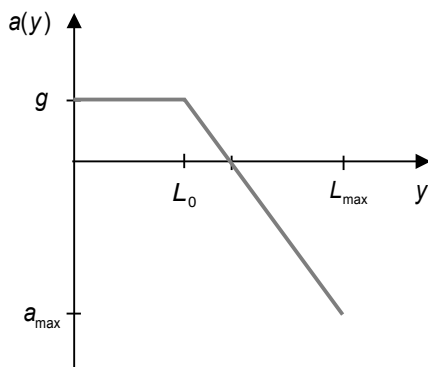
En nuestro caso el valor de $L_{\max}$ para que el saltador no choque debe coincidir con la altura del puente, por tanto: $L_{\max} = h = 100$ m, y resolviendo con los datos $m = 70$ kg y $a = 1960$ N, se obtiene para L_0 el valor indicado en el enunciado:

$$L_0 = \frac{100}{1 + \frac{70 \cdot 9,8}{1960} \left(1 + \sqrt{1 + 2 \frac{1960}{70 \cdot 9,8}} \right)} = 44,3 \text{ m}.$$

d) En la fase 1 la aceleración es simplemente g . En la fase 2, según la segunda ley de Newton tenemos que, en función de la distancia vertical y recorrida:

$$mg - k(y - L_0) = ma \rightarrow a(y) = \left(g + \frac{k}{m}L_0 \right) - \frac{k}{m}y,$$

que es una recta. Por tanto, la representación gráfica de la aceleración en función de la distancia, $a(y)$, es la siguiente:



La aceleración máxima en valor absoluto se alcanzará en el punto $y = L_{\max}$. Utilizando la expresión obtenida en el apartado b obtenemos

$$a_{\max} = g + \frac{k}{m}(L_0 - L_{\max}) = -g\sqrt{1 + 2\frac{a}{mg}} = -2,6g,$$

que es menor en módulo que la máxima aceleración tolerable, $4g$.

e) Dos subapartados:

i) La fuerza elástica máxima que sufría la cuerda ocurría cuando se había estirado hasta una longitud de 100 m. En la nueva situación, vemos en la figura que en ningún momento la longitud de la cuerda alcanza los 100 m desde el punto de anclaje (el punto máximo es poco más de 90 m). El saltador tenía razón.

ii) No alcanza la misma cota que la del punto de salto porque en B la velocidad no es nula. Parte de la energía potencial en A se ha convertido en energía cinética y en energía elástica (porque la cuerda queda un poco estirada) en B:

$$0 = -mg\Delta y_{AB} + \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}k(L_B - L_0)^2 \rightarrow v_B = \sqrt{2g\Delta y_{AB} - \frac{k}{m}(L_B - L_0)^2}.$$

De la gráfica, la diferencia de altura entre A y B es $\Delta y_{AB} = 0,5$ m, y la longitud de la cuerda (entre O y B) es $L_B = 48,1$ m. El valor de k es: $k = a / L_0 = 1960/44,3 = 44,2$ N/m. Así podemos obtener la velocidad en B:

$$v_B = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 0,5 - \frac{44,2}{70}(48,1 - 44,3)^2} = 0,8 \text{ m/s}.$$

Saber más

En la resolución hemos despreciado la masa de la cuerda, pero para unas condiciones similares a las planteadas en el problema, una cuerda realista de unos 40 m pesaría en torno a 10 kg, que no es tan despreciable frente a la masa del saltador. En las siguientes direcciones puedes encontrar un planteamiento matemático sin despreciar la masa de la cuerda:

<https://www.real-world-physics-problems.com/physics-of-bungee-jumping.html>.

<https://staff.fnwi.uva.nl/a.j.p.heck/Research/art/BungeeJumping.pdf>.

36. Curiosidad por el Curiosity

El rover Curiosity de la misión *Mars Science Laboratory* tiene una masa de 900 kg y rueda por la superficie de Marte. El diámetro de Marte es de 6780 km y su distancia media al Sol es de 228 millones de km. El diámetro de la Tierra es de 12742 km, está a unos 150 millones de km del Sol y tiene 9,3 veces más masa que el planeta vecino. Calcula:

- a) Los días que tarda el Curiosity en dar la vuelta al Sol.
- b) El peso del Curiosity en Marte.

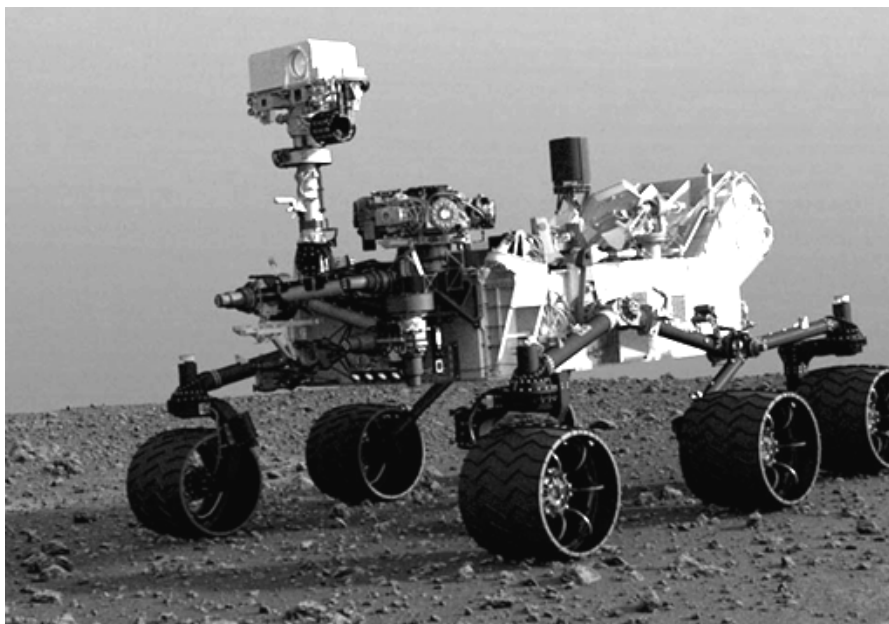


Imagen: NASA/JPL-Caltech

Resolución

a) Como sabemos, la relación entre la distancia al Sol de dos planetas, en este caso la Tierra (T) y Marte (M), y el tiempo que tardan en completar una órbita entera alrededor de éste, viene dada por la 3ª ley de Kepler:

$$\frac{T_M^2}{T_T^2} = \frac{R_M^3}{R_T^3}.$$

Por tanto, es fácil obtener el periodo de rotación de Marte alrededor del Sol:

$$T_M = T_T \left(\frac{R_M}{R_T} \right)^{3/2} = 365 \text{ días} \times \left(\frac{228 \cdot 10^9 \text{ m}}{150 \cdot 10^9 \text{ m}} \right)^{3/2} = 684 \text{ días}.$$

Por lo tanto, el Curiosity (como está sobre Marte) tarda 684 días en dar la vuelta al Sol.

b) La fórmula para obtener el peso de un objeto viene dada por:

$$P = mg ,$$

donde m es la masa del objeto y g la gravedad en el lugar en el que se encuentra. Esta última se puede calcular con la fórmula

$$g = \frac{GM}{R^2} ,$$

donde G es la constante de gravitación universal, M es la masa del planeta y R es el radio de éste. Por tanto, como sabemos que la tierra tiene 9,3 veces la masa de Marte, si comparamos las ecuaciones de la gravedad de ambos planetas:

$$\frac{g_M}{g_T} = \frac{GM_M / R_M^2}{GM_T / R_T^2} = \frac{M_M}{M_T} \left(\frac{R_T}{R_M} \right)^2 = \frac{1}{9,3} \left(\frac{12742 \cdot 10^3}{6780 \cdot 10^3} \right)^2 = 0,38 .$$

Obtenemos la gravedad en la superficie de Marte:

$$g_M = 0,38 g_T = 0,38 \cdot 9,8 = 3,72 \text{ m/s}^2 .$$

Para calcular el peso del Curiosity en Marte tenemos en cuenta la gravedad calculada y la masa del Curiosity ($m_C = 900 \text{ kg}$):

$$P_{C,M} = m_C g_M = 900 \cdot 3,72 = 3349,7 \text{ N} .$$

Saber más

<http://www.nasa.gov/msl>.

<https://mars.nasa.gov/msl>.

La *Mars Science Laboratory* (abreviada MSL), es una misión espacial dirigida por la NASA cuyo objetivo es la exploración marciana, en particular, el estudio de las condiciones de existencia de vida pasada. Fue lanzada en noviembre de 2011 y aterrizó en Marte en agosto de 2012. La misión consta de un vehículo todoterreno (*rover*) de seis ruedas conocido como Curiosity, del tamaño de un coche aproximadamente. El Curiosity tiene cámaras, motor de dióxido de plutonio como combustible, baterías, antenas, y muchos más instrumentos.

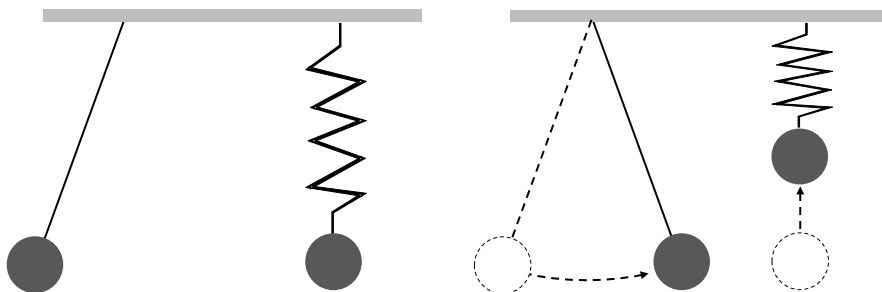
En 2020 la misión seguía activa. En julio de 2020 se lanzó una misión, la Mars 2020, con el nuevo rover Perseverance que llegó a Marte en febrero de 2021: <https://mars.nasa.gov/mars2020/>.

Ahora hay varios vehículos investigando la superficie marciana; además del Curiosity y el Perseverance está el ZhuRong de la misión china Tianwen-1.

37. ¿Muelle o péndulo?

Colgamos una masa de 100 g en un muelle y observamos que éste se alarga 5 cm. A continuación, hacemos oscilar la masa suspendida del muelle. Por otro lado, colgamos de un péndulo una masa igual a la anterior y lo dejamos oscilar. Queremos sincronizar los dos movimientos, el del péndulo con el del muelle. Contesta:

- a) ¿Qué longitud debe tener el péndulo para conseguir la sincronización?
- b) ¿Depende la solución obtenida del valor de la masa suspendida del muelle?
¿Depende del valor de la masa colgada en el péndulo?



Resolución

a) Si el péndulo y el muelle están sincronizados, sus periodos de oscilación deben ser iguales. Gracias a la Ley de Hooke sabemos que la fuerza aplicada sobre un muelle es proporcional a su estiramiento:

$$F = k \Delta x .$$

En este caso, la fuerza aplicada sobre el muelle es el peso del objeto que se ha colgado de él, es decir: $F = P = mg$. Suponemos que el muelle tiene masa despreciable y constante elástica k . Por tanto, si igualamos el peso a la fuerza recuperada de Hooke obtenemos

$$k = \frac{mg}{\Delta x} .$$

Por otro lado, sabemos que el periodo de oscilación de un muelle viene dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} .$$

Sustituimos k por su expresión obtenida en función del estiramiento, quedando

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{mg / \Delta x}} = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta x}{g}} .$$

Respecto al péndulo, si su longitud es L el periodo de oscilación es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} .$$

Comparando las dos expresiones de los periodos concluimos que, para que el muelle y el péndulo estén sincronizados, se cumple

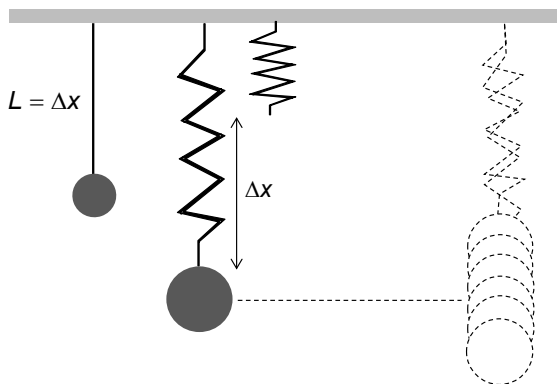
$$L = \Delta x .$$

Teniendo en cuenta los datos, la longitud del péndulo debe ser $L = 0,05$ m.

b) El valor de la longitud del péndulo sí depende del valor de la masa colgada del muelle, ya que como hemos visto anteriormente: $L = \Delta x = mg / k$.

Sin embargo, no depende del valor de la masa colgada del péndulo, ya que como hemos visto, el valor de L depende enteramente de las propiedades del muelle con el que se está comparando.

El siguiente dibujo resume la situación completa del problema. Inicialmente no cuelga ninguna masa del muelle. Después suspendemos una masa m y el muelle se estira una cantidad Δx , que depende de dicha masa. Esta cantidad Δx será precisamente la longitud L que deberá tener el péndulo para que oscile sincronizado con el muelle.



En la derecha, en línea discontinua, se muestra el muelle oscilando respecto a la posición de equilibrio que tenía tras suspenderle la masa (las oscilaciones pueden tener cualquier amplitud, la cual no tiene nada que ver con el estiramiento Δx). En la izquierda se dibujado el péndulo con una masa colgada distinta a la del muelle, para resaltar el hecho de que dicha masa del péndulo no afecta a su período de oscilación.

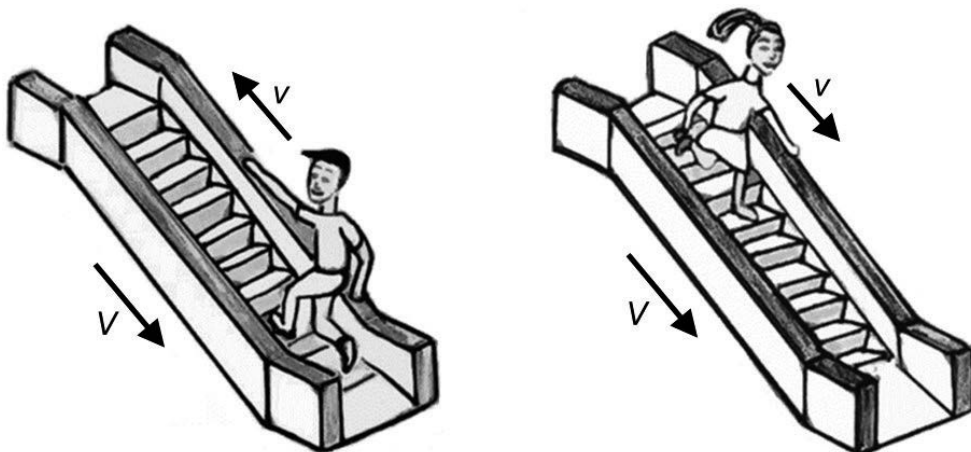
Si cambiamos la masa del muelle, cambiará su estiramiento y, por tanto, habrá que ajustar la longitud del péndulo a la nueva situación para seguir teniendo períodos iguales.

Saber más

Si lleváramos a la Luna el muelle y el péndulo diseñados para estar sincronizados en la Tierra, al repetir el experimento veríamos que ya no están sincronizados. El período del muelle es el mismo en la Luna, pues la masa m y la constante k no cambian. Sin embargo, el período del péndulo depende de la gravedad, que es unas 6 veces menos en la Luna. Entonces, el período del péndulo en la Luna sería $\sqrt{6}$ veces el período del muelle (mientras que en la Tierra son iguales).

38. Contra escalera

Una escalera eléctrica desciende con velocidad constante V . Una estudiante que corre a velocidad v baja avanzando por la escalera y tarda 30 s en recorrerla. Otro estudiante decide subir por la escalera en contravía y tarda 60 s en llegar arriba. ¿Cuánto vale V en función de v ?



Resolución

Cuando el estudiante baja la escalera su velocidad, v_1 , es la suma de la suya respecto a la escalera, v , más la propia de la escalera, V , es decir: $v_1 = v + V$.

En la bajada recorre una distancia L (la longitud de la escalera) en un tiempo $t_1 = 30$ s.

En la subida recorre la misma distancia L en un tiempo $t_2 = 60$ s, a una velocidad $v_2 = v - V$.

Por tanto, tenemos que

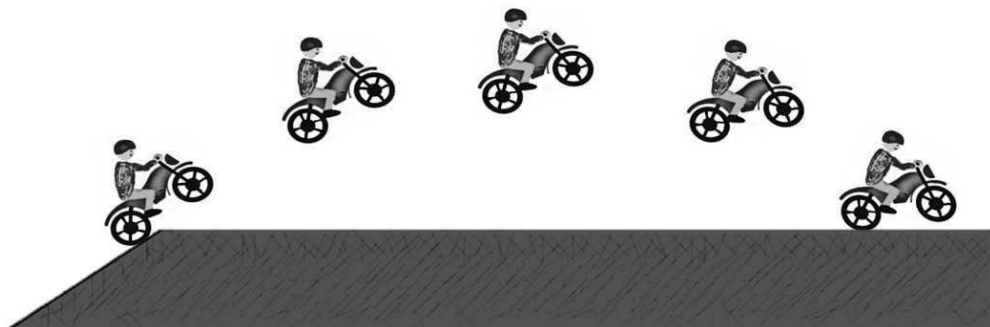
$$L = (v + V) t_1 = (v - V) t_2,$$

de donde podemos despejar V en función de v :

$$V = \frac{t_2 - t_1}{t_2 + t_1} v = \frac{60 - 30}{60 + 30} v = \frac{1}{3} v.$$

39. Motocross parabólico

Un motorista de motocross da un salto despegando de la rampa con un ángulo de 45° . Lo repite después, pero con el doble de velocidad. Calcula el ángulo en el segundo caso para que el alcance de los dos saltos sea el mismo.



Resolución

Planteamos las ecuaciones del movimiento parabólico en cada eje:

Eje X: $x = (v \cos \alpha) t$ (movimiento rectilíneo uniforme).

Eje Y: $y = (v \sin \alpha) t - \frac{g}{2} t^2$.

donde x es la distancia horizontal, α es el ángulo de salida con la horizontal, y v el módulo de la velocidad inicial.

La moto sale y llega a la misma altura $y = 0$. Despejando el tiempo de la primera ecuación y sustituyéndolo en la segunda, tenemos

$$t = \frac{x}{(v \cos \alpha) t} \rightarrow 0 = x \tan \alpha - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{(v \cos \alpha) t} \right)^2 \rightarrow x = \frac{2v^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Y usando la igualdad $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$, queda

$$x = \frac{v^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Si llamamos $\alpha_1 = 45^\circ$ al ángulo del primer lanzamiento y v_1 a su velocidad, y α_2 al ángulo del segundo lanzamiento y utilizando del enunciado que su velocidad es $v_2 = 2v_1$, entonces tenemos, dado que el alcance ha de ser el mismo, que

$$\frac{v_1^2}{g} \sin 2\alpha_1 = \frac{v_2^2}{g} \sin 2\alpha_2 \rightarrow \sin 2\alpha_2 = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^2 \sin 2\alpha_1,$$

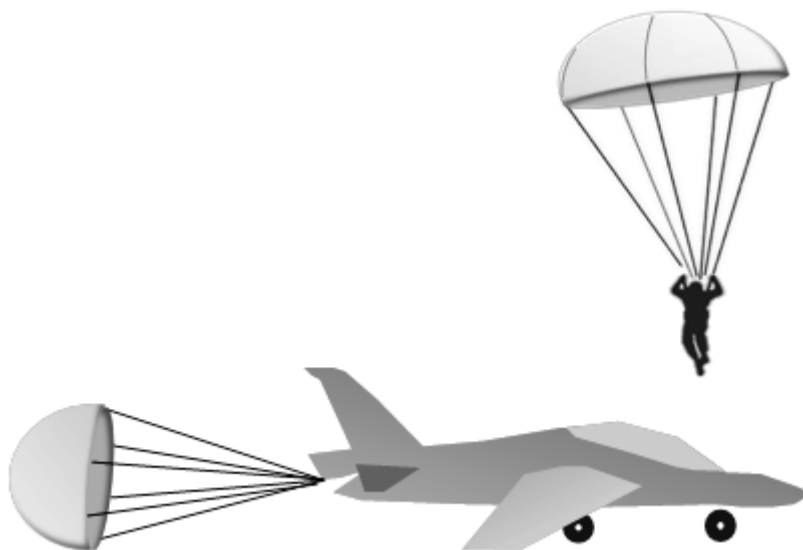
y en nuestro caso:

$$\sin 2\alpha_2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin (2 \cdot 45^\circ) = \frac{1}{4} \rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{4},$$

que tiene dos soluciones: $\alpha_2 = 7,2^\circ$ y $\alpha_2 = 82,8^\circ$.

40. El paracaidista

Un paracaidista de 90 kg de masa desciende con velocidad constante suspendido de su paracaídas por 6 cuerdas. El radio del paracaídas es R y la longitud de las cuerdas es $2R$. Calcula el valor de la tensión de cada cuerda.



Resolución

Como el paracaidista desciende con velocidad constante, la fuerza total ejercida por las 6 cuerdas debe compensar el peso.

Cada cuerda está sometida a una tensión T y forma un ángulo α con la vertical. Por tanto, la suma de las componentes verticales de las 6 cuerdas debe ser igual a mg :

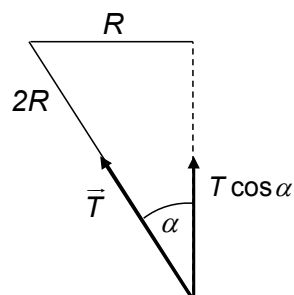
$$6T \cos \alpha = mg .$$

Por otro lado, de acuerdo a las dimensiones del paracaídas mostradas en el dibujo,

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{(2R)^2 - R^2}}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \alpha = 30^\circ .$$

Por tanto:

$$6T \frac{\sqrt{3}}{2} = mg \rightarrow T = \frac{90 \cdot 9,8}{3\sqrt{3}} = 169,7 \text{ N} .$$



Saber más

Los *paracaídas de frenado* se utilizan para reducir la distancia de frenado de un avión durante el aterrizaje. Supón que a un avión de 9 toneladas le fallan los frenos en la pista cuando todavía va a 100 km/h, se activa un paracaídas como el anterior y el avión se detiene en 5 s. Comprueba que la tensión de cada cuerda es 9622,5 N.

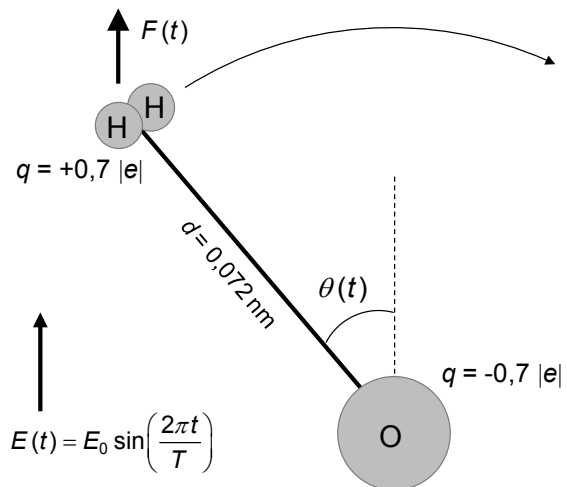
41. Horno microondas

Un horno microondas funciona de la siguiente manera: mediante un dispositivo llamado *magnetrón* se generan ondas electromagnéticas en el rango del espectro de microondas. Como las paredes de la cavidad del horno son metálicas y, según sabemos, el campo eléctrico en la superficie de un conductor es nulo, las ondas tienen nodos en las paredes del horno y se forman ondas estacionarias (ver figura). (Podemos considerar por simplicidad el problema en una sola dimensión: la anchura del horno).



¿Por qué estas microondas calientan la comida? En realidad, lo que se calienta directamente es el agua que contienen los alimentos. Esto es debido a que la molécula de agua es *polar*: la carga negativa se acumula en un extremo de la molécula y la carga positiva en el otro (ver figura). Entonces, la vibración del campo eléctrico de las microondas hace rotar las moléculas de agua.

Este movimiento de rotación se transmite por fricción a las moléculas circundantes, que así aumentan su energía interna y, por tanto, su temperatura.



En las especificaciones técnicas de un horno doméstico leemos que la frecuencia de las microondas emitidas es $f = 2,45 \text{ GHz}$ y que la potencia total consumida por el aparato es de 1200 W , de los cuales en forma de ondas electromagnéticas se emiten 800 W . La cavidad del horno es cúbica de 25 cm de lado.

a) ¿Qué resistencia eléctrica tiene el horno microondas? ¿Qué intensidad eléctrica entra por el cable del horno?

b) Por la puerta del horno se pierden unos 5 mW/cm². ¿Qué intensidad de las ondas de microondas que escapan del horno nos llega a nosotros, si estamos a 50 cm de distancia?

c) ¿Qué anchura mínima puede tener un horno para que se produzca la onda de microondas estacionaria? Justifica por qué crees adecuado el tamaño de los hornos microondas domésticos. ¿Cuál crees que es la misión que tiene el giro del plato dentro del horno?

d) La radiación electromagnética se puede considerar también compuesta por partículas individuales llamadas *fonones*, cada uno de ellos transportando una energía $E = hf$, donde h es la constante de Planck. ¿Cuántos fonones absorbe un pollo dentro del horno durante 1 segundo?

e) La amplitud del campo eléctrico en el interior del microondas viene dada por la expresión

$$E_0 = \sqrt{2cP\mu_0 / S} ,$$

donde P es la potencia de microondas generada por el horno, S la superficie de la cavidad interna y c la velocidad de la luz en el vacío. Calcula el valor de E_0 .

Vamos a modelizar la molécula de agua de la siguiente forma (ver figura anterior):

Consideramos los dos átomos de hidrógeno juntos a una distancia $d = 0,072$ nm del átomo de oxígeno. (En realidad forman un triángulo, pero los resultados cualitativos son similares). En el extremo donde están los átomos de hidrógeno hay una carga neta positiva de $+0,7|e|$ y en el extremo donde está el oxígeno hay una carga de $-0,7|e|$.

Suponemos, por simplicidad, que el extremo de los dos átomos de hidrógeno rota respecto al extremo donde se encuentra el átomo de oxígeno (que consideramos fijo).

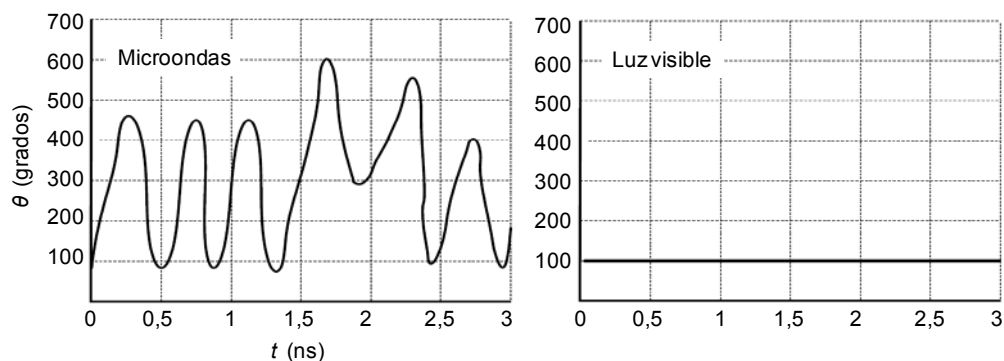
Consideramos una molécula en el plano de vibración del campo eléctrico, el cual oscila de forma sinusoidal: $E = E_0 \sin(2\pi t / T)$.

f) Obtén la expresión de la fuerza eléctrica, en función del ángulo θ y del tiempo que actúa sobre el extremo donde están los átomos de hidrógeno. Y halla la fuerza eléctrica máxima para los datos del horno descrito anteriormente.

g) Sabiendo que el momento de inercia de una masa puntual, m , situada a distancia d del eje de giro es $I = md^2$, calcula el momento de inercia de la molécula de agua (respecto del extremo fijo del oxígeno).

h) Obtén una expresión para el momento creado por la fuerza eléctrica sobre la molécula de agua, respecto del extremo fijo del oxígeno, en función del ángulo θ y del tiempo.

i) La solución de θ en función del tiempo considerando el momento del apartado anterior viene dada en las siguientes figuras: figura izquierda para microondas y figura derecha en el caso de luz visible. Interpreta la gráfica y explica por qué no se calentaría el agua con luz visible.



j) A partir de la gráfica de θ para microondas, describe el movimiento de rotación que experimenta la molécula de agua, indicando el sentido de giro (horario o antihorario) y las veces que cambia de sentido durante el intervalo de tiempo mostrado.

k) Leyendo de la gráfica, obtén el ángulo que ha rotado la molécula desde el instante inicial hasta un tiempo igual a un semiperíodo de la oscilación del campo electromagnético de las microondas.

Datos: $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$, $|e| = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, masa del hidrógeno $= 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

Resolución

a) Sabiendo que la potencia total consumida es de 1200 W y que en forma de ondas electromagnéticas se emite 800 W, entonces se consume una potencia $P = 1200 - 800 = 400 \text{ W}$ en los circuitos del microondas, por lo que, de acuerdo a la ley de Ohm, y sabiendo que la tensión en un enchufe doméstico es $V = 220 \text{ V}$, la resistencia es

$$\left. \begin{array}{l} P = VI \\ I = \frac{V}{R} \end{array} \right\} \rightarrow R = \frac{V^2}{P} = \frac{220^2}{1200} = 40,3 \, \Omega.$$

(Nota: Se están utilizando las expresiones para la corriente continua, aunque en realidad el enchufe proporciona corriente alterna y el tratamiento matemático sería un poco diferente).

La intensidad será la necesaria para, con una diferencia de potencial de 220 V, transmitir una potencia total de 1200 W:

$$I = \frac{P}{V} = \frac{1200}{220} = 5,5 \text{ A}.$$

b) Si por la puerta del horno se pierden 5 mW/cm^2 , la potencia de ondas electromagnéticas perdida por la puerta de lado $L = 25 \text{ cm}$, cuya superficie es $S = L^2$, será

$$P = 5 \text{ mW/cm}^2 \times (25 \text{ cm})^2 = 3,125 \text{ W}.$$

Suponiendo que las ondas emitidas se distribuyen en un frente esférico, a una distancia $d = 50 \text{ cm}$ la intensidad de las ondas es

$$I = \frac{P}{4\pi d^2} = \frac{3,125}{4\pi \cdot 0,5^2} = 1 \text{ W/m}^2.$$

(Nota: en realidad la mayor parte de la radiación se emitirá en la dirección hacia adelante, por tanto el frente de ondas será más bien una semiesfera de superficie $2\pi d^2$. En la realidad habría que estudiar con más detalle cuál es la distribución angular de la radiación emitida).

c) Para que se produzca una onda estacionaria, la longitud de la onda electromagnética ha de ser tal que al menos coincidan dos nodos consecutivos en las paredes, es decir,

$$L = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2f} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 2,45 \cdot 10^9} = 6,12 \text{ cm}.$$

En un microondas doméstico la longitud típica es $L = 25 \text{ cm}$, como dice el enunciado. En esa longitud caben 2 longitudes de onda.

Si no se moviera la comida, se calentaría mucho cerca de las zonas donde están los vientres y valles de la onda y se quedaría fría cerca de los nodos. El movimiento del plato hace que la comida tienda a calentarse de forma más o menos uniforme pues hace pasar la comida por distintas zonas de la onda estacionaria y no siempre estar en un nodo o en una cresta.

d) Si cada fotón lleva una energía $E = hf$ y se emite una energía por unidad de tiempo $P = 800 \text{ W}$ en forma de ondas electromagnéticas, que es absorbida por la comida, entonces el número de fotones absorbidos por segundo será

$$\frac{P}{hf} = \frac{800}{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 2,45 \cdot 10^9} = 4,93 \times 10^{26} \text{ fotones/s}.$$

e) Utilizamos directamente la expresión de E_0 proporcionada. Hay que tener en cuenta que la superficie interior será 6 veces la superficie de un cuadrado de lado $L = 25 \text{ cm}$ pues el enunciado afirma que la cavidad del microondas tiene forma cúbica (6 caras):

$$E_0 = \sqrt{\frac{2cP\mu_0}{S}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 800 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{6 \cdot 0,25^2}} = 1268,3 \text{ N/C}.$$

f) El campo eléctrico es, en buena aproximación, uniforme en el espacio en la escala de una molécula de agua (de tamaño depreciable frente a la escala espacial de variación del campo electromagnético, que es de centímetros (ver apartado c)). Por tanto la fuerza sobre una carga $q = +0,7|e|$ es

$$\vec{F} = q\vec{E} = qE_0 \sin(2\pi t/T) \vec{j},$$

donde vemos que el eje Y coincide con la dirección del campo electromagnético.

(Vemos que la fuerza no depende del ángulo θ).

El valor máximo se alcanza cuando la función seno vale 1:

$$F_{\max} = qE_0 = 0,7 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1268,3 = 1,42 \times 10^{-16} \text{ N}.$$

g) Simplemente hay que aplicar la expresión proporcionada del momento de inercia $I = m d^2$, donde m será dos veces la masa de un átomo de hidrógeno. Por tanto,

$$I = 2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot (0,072 \cdot 10^{-9})^2 = 1,73 \times 10^{-47} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

h) El momento creado por la fuerza eléctrica, $\vec{F}$, aplicada sobre un punto de vector de posición $\vec{r}$ es

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = d F \sin \theta \vec{u},$$

donde $\vec{u}$ es el vector unitario en la dirección perpendicular al plano de la figura.

En módulo, tenemos

$$M(t) = d q E_0 \sin \theta \sin(2\pi t / T).$$

i) En la figura correspondiente a las microondas, vemos que la molécula de agua hace desplazamientos angulares grandes, por tanto puede calentar las moléculas vecinas por fricción. Sin embargo, en la figura para la luz visible, la molécula no gira y por tanto no hay fricción con las vecinas. (En este último caso la frecuencia de la luz visible es demasiado elevada como para que la molécula de agua la pueda “seguir”).

j) Cuando la pendiente de la figura, $d\theta / dt$, es positiva, entonces el giro es antihorario y cuando es negativo, es horario.

Cambia de sentido de rotación cuando $d\theta / dt$ pasa de positivo a negativo, es decir, en los extremos de $\theta(t)$. Esto último ocurre 12 veces a lo largo del tiempo mostrado en la figura.

(Puede dar varias vueltas o fracciones de vuelta antes de cambiar de sentido de giro. De hecho, el comportamiento es caótico).

k) Un semiperiodo del campo electromagnético corresponde a un tiempo $t = T / 2 = 1 / 2f = 0,2 \text{ ns}$.

Durante ese tiempo, y desde el instante inicial, el ángulo θ ha pasado de valer unos 90° a unos 450° , es decir ha dado un giro de $450 - 90 = 360^\circ$ (una vuelta completa).

Saber más

Probablemente hayas oído alguna vez que el horno microondas puede ser peligroso e incluso que provoca cáncer. Para provocar cáncer hay que romper enlaces químicos, es decir, arrancar electrones que están ligados al átomo con energías en la escala del electronvoltio, eV. Para ello se necesita radiación con una energía en la escala del eV. A esas radiaciones capaces de arrancar electrones, es decir, ionizar, se les llama *radiaciones ionizantes*. Los fotones de la radiación microondas tienen una energía por cada fotón de entre 10^{-5} y 10^{-2} eV, es decir, varios órdenes de magnitud menor de lo necesario para ser ionizante. Lo mismo ocurre con los campos electromagnéticos habituales a los que estamos expuestos: telefonía móvil, líneas de alta tensión, etc. Lo que sí podría provocar la radiación microondas (o de un teléfono móvil, etc.) es un pequeño calentamiento en muy altas dosis y durante periodos largos de exposición. El efecto biológico de este calentamiento es lo que es debatible científicamente. En el siguiente enlace puedes ver la posición oficial sobre la posible peligrosidad de los hornos microondas de la Organización Mundial de la Salud (OMS):

<https://www.who.int/news-room/q-a-detail/radiation-microwave-ovens>.

42. Grasa y Arquímedes

Se midió que el porcentaje de grasa de una persona era del 20 %. Calcula el peso aparente de esa persona cuando está completamente sumergida en agua (suponiendo que ha espirado todo el aire de los pulmones). Expresa el resultado en tanto por ciento respecto al peso real.

Datos: densidad de la grasa = $0,9 \text{ g/cm}^3$, densidad del resto del cuerpo (excepto la grasa) = $1,1 \text{ g/cm}^3$, densidad del agua = $1,0 \text{ g/cm}^3$.

Resolución

Con un porcentaje de grasa del 20 %, llamando m a la masa total de la persona, la masa de su grasa es $m_g = 0,2m$, y la del resto del cuerpo es $m_{rc} = 0,8m$.

El peso aparente lo expresamos como

$$P^* = P - E,$$

donde $P = mg$ es el peso real y E es el empuje que experimenta el cuerpo de la persona que, según el principio de Arquímedes, es

$$E = V_a \rho_a g,$$

siendo V_a el volumen de agua desalojada por el cuerpo y ρ_a la densidad del agua. El volumen V_a es igual al del cuerpo de la persona, ya que está totalmente sumergida, y es la suma de los volúmenes que ocupan la grasa y la parte del cuerpo sin grasa:

$$V_a = V = \frac{m_g}{\rho_g} + \frac{m_{rc}}{\rho_{rc}} = \frac{0,2m}{\rho_g} + \frac{0,8m}{\rho_{rc}},$$

donde ρ_g y ρ_{rc} son las densidades de la grasa y del cuerpo sin grasa que se dan en el enunciado.

Finalmente obtenemos

$$P^* = mg - mg \cdot \left(\frac{0,2}{0,9} + \frac{0,8}{1,1} \right) \cdot 1 = 0,05mg.$$

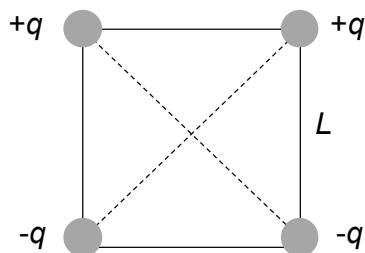
El porcentaje respecto al peso real resulta: $\frac{P^*}{P} \times 100 = 5 \%$.

Saber más

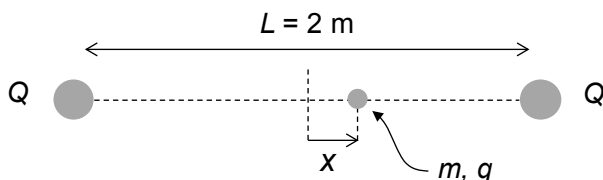
El fenómeno estudiado es justamente el fundamento del *pesaje hidrostático*, uno de los métodos de medida de la densidad y del porcentaje de grasa corporal. Es de hecho el método más preciso, aunque alternativamente se utiliza el método de los pliegues cutáneos. El pesaje hidrostático se realiza en un tanque de agua donde hay una balanza sobre la cual se sitúa la persona, sumergida y vaciando sus pulmones.

43. Cargas eléctricas

a) En los vértices del cuadrado de la figura (de lado L) hay situadas cuatro cargas eléctricas de igual valor y signos opuestos según se indica. Obtén la expresión del módulo del campo eléctrico total que crean las cargas en el centro del cuadrado, en función de q , L y la constante de Coulomb.



b) Situamos dos cargas fijas Q separadas una distancia $L = 2$ m. Justo en medio se encuentra en reposo una tercera carga q de masa m . Separamos dicha carga una pequeña distancia de su posición de reposo y, en consecuencia, empieza a realizar un movimiento armónico simple en torno a $x = 0$.



Halla la fuerza que experimenta la carga y su período de oscilación, en función de x , Q , q , m y la constante de Coulomb.

Discute el signo de las cargas para que exista el movimiento armónico.

(Suponemos x es mucho menor que L y, por tanto: $1/(1 \pm x)^2 \approx 1 \mp 2x$).

Resolución

a) Comenzamos aplicando el teorema de Pitágoras para conocer la distancia, a , que separa a cada carga del centro del cuadrado:

$$L^2 = a^2 + a^2 \rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}L.$$

Las componentes en la dirección horizontal de los campos eléctricos generados por cada una de las cargas, al ser éstas de igual magnitud, se cancelan entre ellas. Por otra parte, las componentes en dirección vertical serán todas positivas (recordemos que las cargas negativas actúan como “fuentes” y las positivas como “sumideros”). Usemos ahora la conocida expresión para la obtención del módulo del campo eléctrico generado por una de las cargas positivas en el centro del cuadrado:

$$E_1 = K \frac{q}{a^2} = K \frac{q}{L^2/2} = K \frac{2q}{L^2}.$$

Determinamos a partir de ella las componentes del campo eléctrico en la dirección Y:

$$E_{1y} = E_1 \cos 45^\circ = K \frac{2q}{L^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \frac{Kq}{L^2}.$$

Por el signo de las cargas, los cuatro campos tienen sentido hacia abajo y son iguales en magnitud:

$$E_{4y} = E_{3y} = E_{2y} = E_{1y}.$$

Por el principio de superposición, el campo eléctrico total será la suma de cada uno de los campos eléctricos generados por cada carga:

$$\vec{E} = -4\sqrt{2} \frac{Kq}{L^2} \vec{j}.$$

Si colocamos una carga en el centro del cuadrado, empezará a moverse a lo largo del eje vertical que pasa por el centro del cuadrado (hacia arriba o hacia abajo dependiendo del signo de la carga).

b) A partir de la figura, observamos que la distancia que separa a una carga del punto medio es $L/2$. Así, las fuerzas que experimenta la carga q vendrán dadas por la fuerza de Coulomb:

$$F_1 = K \frac{Qq}{(L/2 + x)^2}, \quad F_2 = -K \frac{Qq}{(L/2 - x)^2}.$$

Y, por el principio de superposición, y dado que $L = 2$ m, la fuerza total es

$$F = KQq \left[\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1-x)^2} \right],$$

que no depende de la masa m de la carga.

Como cabe esperar, si $x = 0$ la fuerza es nula y la carga está en equilibrio.

Ahora separamos la carga una distancia x de su posición de equilibrio y hemos de obtener el período de oscilación.

Vamos a demostrar primero que la fuerza sobre la carga depende linealmente del desplazamiento x y que, por tanto, la solución de la ley de Newton produce un movimiento armónico simple.

Para pequeños desplazamientos podemos aproximar la fuerza por

$$F \approx KQq [(1-2x) - (1+2x)] = -4KQqx.$$

En general, para cualquier valor de L :

$$F \approx -\frac{4KQq}{(L/2)^3} x.$$

Independientemente del signo de las cargas, en $x = 0$ hay equilibrio. Pero una vez perturbado el sistema, sólo existirá oscilación en torno a $x = 0$ si la fuerza tiende a devolver a la carga a su posición de equilibrio, es decir, si x y F tienen distinto signo. Esto sólo ocurre si las cargas Q y q tienen el mismo signo (ambas positivas o negativas). Si Q y q son de distinto signo, la fuerza tenderá a alejar a q cada vez más del centro una vez separada una distancia x .

La 2ª ley de Newton establece:

$$-4KQq x = ma = m \frac{d^2 x}{dt^2},$$

que es la ecuación diferencial conocida para la oscilación de un péndulo o un muelle:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x,$$

donde $\omega^2 = \frac{4KQq}{m} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$.

Despejando el período en la expresión obtenida nos queda

$$T = \pi \sqrt{\frac{m}{KQq}}.$$

De nuevo vemos aquí que sólo tiene sentido que exista oscilación si el signo de Q y q es el mismo.

Saber más

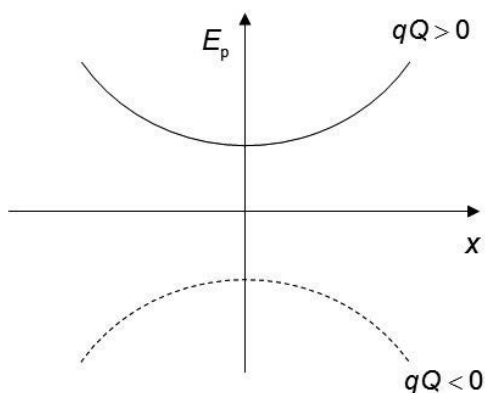
La oscilación de la carga q en torno a $x = 0$ puede también estudiarse a partir de la energía potencial eléctrica, que es:

$$E_p = K \frac{Qq}{1+x} + K \frac{Qq}{1-x} = \frac{2KQq}{1-x^2} \approx 2KQq (1+x^2).$$

Para pequeños desplazamientos, la energía potencial tiene una dependencia cuadrática (una parábola), que se representa en la siguiente gráfica.

Cuando las cargas Q y q tienen el mismo signo, la fuerza entre ellas es repulsiva y la fuerza total tiende a recuperar el equilibrio. En este caso hablamos de *equilibrio estable*. En la curva de energía potencial encontramos un pozo con el mínimo en la posición de equilibrio $x = 0$. Si la carga q se separa tenderá a volver hacia atrás (caída en el pozo de potencial) y describirá el movimiento armónico.

En el caso de que Q y q sean de distinto signo, el equilibrio es *inestable*. Una vez que la carga q se separe lo más mínimo de $x = 0$, empezará a alejarse de la posición de equilibrio.



44. Fiebre y sudor

Padeciendo la gripe, una persona de 80 kg tuvo una fiebre de 39,0 °C. La temperatura normal del cuerpo humano es de 36,5 °C. Suponemos que el cuerpo humano es agua en su mayor parte, y suponemos que la persona recuperó su temperatura normal gracias sólo a la sudoración.

a) ¿Cuánta energía se necesitó para elevar la temperatura del enfermo?

b) ¿Cuánto sudor se evaporó de su cuerpo para enfriarse?

Datos del agua: calor específico = 4187 J/(kg °C); calor latente de vaporización (a la temperatura de la piel) = 2416 kJ/kg; densidad = 1000 kg/m³.

Resolución

a) Aplicamos la ecuación conocida para calcular el calor que hay que suministrar a una determinada cantidad de masa de agua para aumentar su temperatura en 2,5 °C:

$$Q = mc\Delta T = 80 \cdot 4187 \cdot (39 - 36,5) = 837,4 \text{ kJ}.$$

b) Ese mismo calor se emplearía para evaporar un volumen V de sudor (si el enfriamiento fuera sólo por sudoración). Hay un cambio de fase y el calor es

$$Q = 837,4 \text{ kJ} = mc_L = \rho V c_L = 1 \text{ kg/L} \times V \times 2416 \text{ kJ/kg} \rightarrow V = \frac{837,4}{2416} = 0,35 \text{ L}.$$

Es decir, si se evapora el sudor que cabe en una lata de 33 cL, se consume una energía igual a la necesaria para elevar 2,5 °C la temperatura de todo el cuerpo.

Saber más

Podemos preguntarnos en cuánto tiempo el cuerpo humano sufriría ese incremento de temperatura “tomando el sol” y suponiendo que no tuviéramos ningún mecanismo de regulación de la temperatura (como la sudoración).

La piel humana tiene una superficie de unos 2 m². Supongamos que tomamos el sol tumbados bocarriba y que, por tanto, recibimos la radiación solar sobre una superficie efectiva de un 1 m². Suponemos que, con los rayos prácticamente perpendiculares y la atmósfera despejada, nos llegan del Sol unos 1000 W/m². Haciendo el cálculo del tiempo resulta:

$$\frac{838 \text{ kJ}}{1 \text{ kW/m}^2 \times 1 \text{ m}^2} = 838 \text{ s} = 14 \text{ min}.$$

Además de la sudoración, el cuerpo humano también regula su temperatura mediante la vasodilatación. Cuando nuestra temperatura aumenta, los vasos sanguíneos periféricos se dilatan y la sangre fluye en mayor cantidad cerca de la piel, de manera que hay más transferencia de calor al ambiente. Ello explica por qué la piel se enrojece después de hacer ejercicio físico, ya que está más irrigada.

45. Un año marciano

El radio orbital medio de nuestro planeta vecino es 227 936 640 km. Suponemos una órbita circular. Calcula:

- a) La duración (en días) de un “año marciano”.
- b) La velocidad lineal de Marte en su órbita (en km/s).
- c) La energía total de Marte en su órbita.

Datos: $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, masa del Sol = $1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$, masa de Marte = $6,42 \times 10^{23} \text{ kg}$.

Resolución

a) Al preguntarnos por la duración de un año en Marte tenemos que calcular el periodo orbital de Marte alrededor del Sol. Según la 3ª ley de Kepler, el radio orbital, r , y el periodo se relacionan mediante la expresión

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{r^3}{GM_{\text{Sol}}}$$

donde M_{Sol} es la masa del Sol proporcionada en el enunciado. Haciendo los cálculos resulta

$$T = 59348757 \text{ s} = 687 \text{ días}$$

La expresión “año marciano” se refiere al tiempo que transcurre en Marte desde una determinada posición del Sol hasta que vuelve a repetirse (por ejemplo, de primavera a primavera). Ese año marciano sería casi dos años terrestres.

b) La velocidad lineal en una órbita solar es

$$v = \sqrt{\frac{GM_{\text{Sol}}}{r}}$$

Por tanto, para Marte resulta

$$v = 24131 \text{ m/s} \approx 24 \text{ km/s}.$$

Marte es un poco más lento que la Tierra (que gira a unos 30 km/s alrededor del Sol) ya que su órbita está más alejada.

c) La energía total en una órbita es

$$E = -\frac{1}{2} \frac{GM_{\text{Sol}}m}{r}.$$

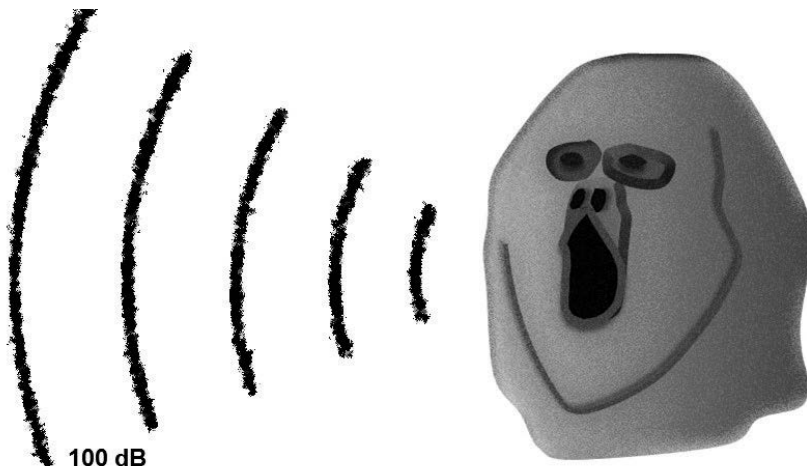
En este caso la masa m es la del planeta Marte. El valor pedido de la energía es

$$E = 1,87 \times 10^{32} \text{ J}.$$

46. Escándalo animal

Los monos aulladores son un género de primates que, como su nombre indica, aúllan. Son animales muy sociables, pero sus gritos son escandalosos. Están considerados los animales terrestres con mayor potencia sonora, ya que un solo mono puede emitir un grito de 100 dB medido a 1 m del animal.

- a) ¿Cuántos decibelios, medidos a 10 m de distancia, podrán alcanzar diez monos aullando a la vez?
- b) ¿Hasta qué distancia podríamos oír a uno de estos monos? Ten en cuenta que la absorción del aire es de unos 0,6 dB cada 100 m.



Resolución

- a) El nivel de intensidad acústica para un solo mono a una distancia d_1 es

$$L_1 = 10 \log \left(\frac{I_1}{I_0} \right) = 10 \log \left(\frac{P_1}{4\pi d_1^2 I_0} \right),$$

donde P_1 es la potencia sonora de un mono.

Si aúllan N monos a la vez, la potencia del sonido se hará N veces mayor:

$$P_N = N P_1.$$

Además, ahora medimos a una distancia d_2 . La intensidad del sonido es

$$I_N = N \frac{P_1}{4\pi d_2^2} = N \frac{P_1}{4\pi d_1^2} \frac{d_1^2}{d_2^2} = N I_1 \frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

Entonces, el nivel de intensidad será de N monos a distancia d_2 resulta:

$$L_N = 10 \log \left(\frac{N I_1}{I_0} \frac{d_1^2}{d_2^2} \right) = 10 \left(\log N + \log \frac{I_1}{I_0} + 2 \log \frac{d_1}{d_2} \right) = 10 \log N + \underbrace{10 \log \frac{I_1}{I_0}}_{L_1} + 20 \log \frac{d_1}{d_2}.$$

Por tanto, si aúllan 10 monos a 10 m:

$$L_{10} = 10 \log 10 + 100 + 20 \log \frac{1}{10} = 10 + 100 - 20 = 90 \text{ dB} .$$

b) Sin absorción, el nivel de intensidad a una distancia d es

$$L = L_1 + 20 \log \frac{d_1}{d} .$$

El umbral de audición humana es 0 dB. Entonces, la distancia máxima sería

$$0 = L_1 + 20 \log \frac{d_1}{d} \rightarrow d_{\max} = d_1 \cdot c = 1 \cdot 10^{100/20} = 100 \text{ km} .$$

No es un resultado realista porque hay absorción. El nivel de intensidad corregido es

$$L = L_1 + 20 \log(d_1 / d) - 0,006 d ,$$

teniendo en cuenta el factor de absorción de 0,006 db por cada 1 m. Por tanto, la distancia máxima a la que llegaría el sonido es

$$0 = 100 + 20 \log(1 / d_{\max}) - 0,006 d_{\max} .$$

Si resolvemos esta ecuación por métodos numéricos o gráficos, el resultado es

$$d_{\max} \approx 4,5 \text{ km} ,$$

que es la distancia a la que se sabe que son audibles los sonidos de estos monos.

Saber más

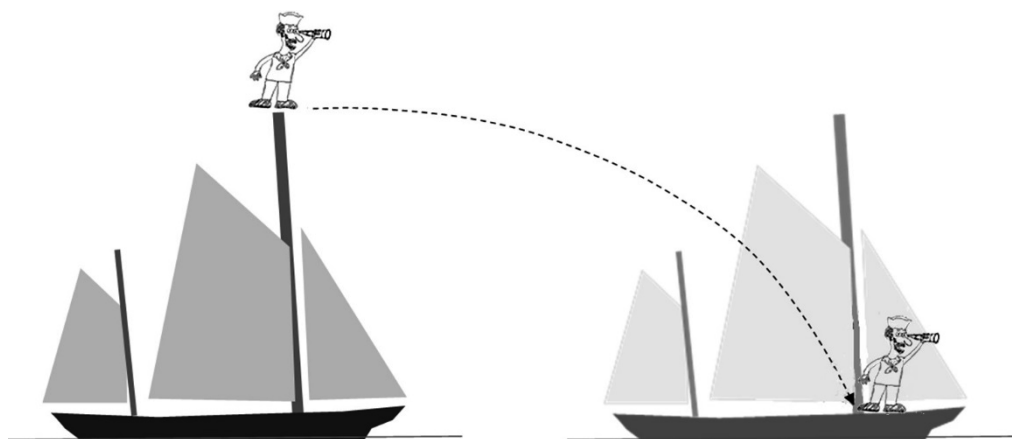
La ballena azul es el mamífero que emite los sonidos más fuertes con gemidos de más de 180 decibelios medidos a 1 m.

Para más información sobre los sonidos de los monos aulladores, ver el artículo:

Da Cunha, R. *et al.* (2015). "Production of Loud and Quiet Calls in Howler Monkeys". En: *Howler Monkeys, Developments in Primatology*, cap. 13, Springer Science, New York (DOI 10.1007/978-1-4939-1957-4_13).

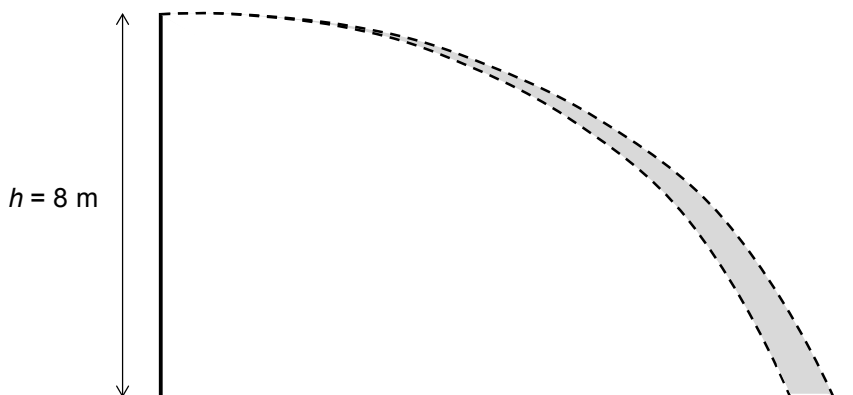
47. Caída desde el mástil

Un marinero cae desde lo alto del mástil de un barco que navega a una cierta velocidad uniforme. Sabemos que el mástil tiene 8 m de altura.



Se ha grabado en video la caída del marinero, pero la cámara se ha movido un poco y sólo sabemos que la trayectoria está comprendida entre las dos mostradas en la siguiente figura. Haz las medidas que necesites con la regla sobre la gráfica.

- ¿Qué distancia horizontal recorre el marinero (o el barco) durante su caída?
- Estima la velocidad que lleva el barco. Expresa el resultado en nudos (1 nudo = 1,852 km/h). Indica también la incertidumbre (en km/h) de dicha velocidad.
- Calcula el valor de la componente vertical de la velocidad cuando el marinero toca el suelo del barco.



Resolución

- Medimos el alcance sobre el eje X de la gráfica y convertimos a metros teniendo en cuenta la escala indicada en el eje Y (la altura es de 8 m). Las posibles trayectorias tienen alcances de entre 13,1 y 14,1 m, con un valor medio de 13,6 m.

b) La velocidad v que lleva el barco coincide con la velocidad inicial del marinero. Utilizamos las ecuaciones del movimiento parabólico:

$$\begin{cases} x = vt \\ y = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} .$$

La distancia horizontal recorrida, o alcance, se obtiene a partir del tiempo empleado durante la caída de una altura $h = 8$ m:

$$y = 0 \rightarrow t = \sqrt{2h/g} = 1,28 \text{ s} .$$

Como el alcance de un tiro semi-parabólico es

$$x_{\max} = v\sqrt{2h/g} .$$

la velocidad resulta

$$v = \frac{x_{\max}}{\sqrt{2h/g}} = \frac{13,6}{1,28} = 10,6 \text{ m/s} = 38,3 \text{ km/h} = 20,7 \text{ nudos} .$$

Para estimar la incertidumbre, calculamos la velocidad del barco teniendo en cuenta todo el rango de valores del alcance (desde 13,1 a 14,1 m). La velocidad estaría en el rango que va desde 36,84 a 39,66 km/h. Así, resulta una incertidumbre de 1,41 km/h. El resultado completo para la velocidad es

$$v = 38,3 \pm 1,4 \text{ km/h} .$$

Al mismo resultado llegamos haciendo la propagación de errores en la ecuación de la velocidad y teniendo en cuenta que la incertidumbre en el alcance es de 0,5 m:

$$\Delta v = \Delta x_{\max} / t = 0,5 / 1,28 = 1,4 \text{ km/h} .$$

c) La componente vertical de la velocidad es

$$v_y = gt = 9,8 \cdot 1,28 = 12,5 \text{ m/s} = 45,2 \text{ km/h} .$$

Saber más

El hecho de que el marinero caiga justo en la base del mástil es resultado del *principio de relatividad* de Galileo.

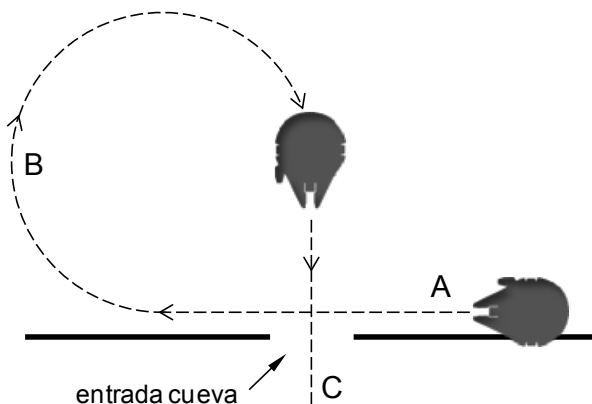
El experimento mental del barco lo presenta Galileo en su obra “Diálogos sobre los dos sistemas máximos del mundo” (1632). El texto dice algo así: “Entra con un amigo dentro de la cubierta de un barco, llevando contigo algunas moscas y mariposas. Cuelga una botella boca abajo para que se vacíe gota a gota sobre un recipiente. Con el barco parado, observa cuidadosamente cómo los pequeños animales vuelan con la misma velocidad hacia todos los lados y que las gotas caen en el recipiente. Luego haz avanzar el barco con velocidad uniforme. No se observará cambio alguno en los efectos nombrados, y no podrás saber si la nave se estaba moviendo o estaba parada.”

48. Física en *Star Wars*

La saga de *Star Wars* consiste hasta el momento en seis películas muy entretenidas aunque repletas de incorrecciones e incongruencias físicas, si bien eso no debe molestarnos pues su objetivo es entretener, no enseñar física. Además, podemos divertirnos un rato discutiendo algunas de las situaciones planteadas en las películas y ver si son coherentes desde el punto de vista físico.

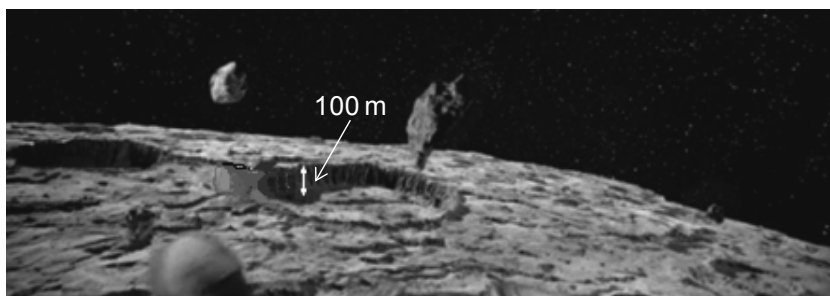
El asteroide

a) En el episodio V, “El Imperio Contraataca”, en una famosa escena los héroes huyen de los cazas imperiales en la nave Halcón Milenario dentro de un campo de asteroides. En un momento dado se acercan a uno grande y ven en el suelo la entrada de lo que parece una cueva, por lo que la nave hace un movimiento de *looping* para entrar en ella (ver esquema en la figura). A partir de otra toma de la secuencia se ha podido deducir



que el Halcón Milenario viaja a 300 m/s. Tanto en el trayecto AB como en el BC la nave tarda 2 s. ¿Cuál es la aceleración media que sufren los pasajeros de la nave entre el punto A y el B? ¿Y entre B y C? ¿Podría soportarlo un ser humano?

b) En la siguiente figura se muestra una imagen del asteroide donde se aprecia su curvatura y donde se indica la altura (100 m) de un cráter que podemos asumir que está en el horizonte.



Consideramos que el asteroide es esférico. Realiza con una regla las mediciones que consideres oportunas sobre la figura. i) Estima el radio del asteroide. ii) Determina la gravedad en la superficie del asteroide y la velocidad de escape asumiendo una densidad media de 3 g/cm^3 , que es una densidad típica de los asteroides en el sistema solar. Dato: $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

La destrucción de Alderaán

En el episodio IV, “Una nueva esperanza”, el gobernador Tarkin, al mando de la nave-ciudad espacial Estrella de la Muerte, ordena desintegrar mediante un rayo láser el planeta natal de la Princesa Leia, Alderaán.

Considera en lo que sigue que Alderaan es similar a la Tierra: $M_{\text{Alderaan}} = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$, $R_{\text{Alderaan}} = 6371 \text{ km}$.

c) Se llama *autoenergía gravitatoria* de un sistema a la energía debida a los campos gravitatorios generados por las propias masas que lo componen. Matemáticamente, se define por la ecuación $U = \int dU$. Demuestra que la autoenergía gravitatoria de una esfera homogénea es

$$U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R},$$

siendo M la masa de la esfera, R su radio y G la constante de la gravitación.

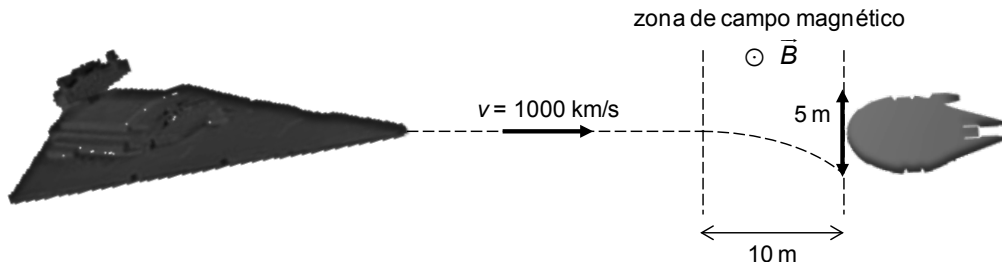
(Ayuda: Toma un casquete esférico de radio r y espesor dr , y considera la energía dU que crea la masa interior sobre dicho casquete. Integra desde 0 a $r = R$).

d) Utilizando el resultado anterior, resuelve: i) ¿Cuánta potencia tenía el rayo láser que destruyó Alderaan, sabiendo que actuó durante 1 s? Expresa el resultado en número de veces la potencia del Sol sabiendo que ésta es $4 \times 10^{26} \text{ W}$. (Desprecia la energía de romper los enlaces químicos de las rocas del planeta, supón que el planeta se desintegra en partículas muy pequeñas que ya no contienen autoenergía gravitatoria y que su velocidad tiende a 0 al alejarse). ii) Calcula de nuevo la potencia del rayo si, como aparece en la película, los trozos del planeta tras la explosión se alejan a una velocidad aproximada de 1 radio del planeta por segundo.

e) La luz del rayo láser podemos considerarla como compuesta por partículas de energía llamadas fotones que transportan cada uno una energía $E = hf$ y una cantidad de movimiento $p = E/c$, donde h es la constante de Planck. Viendo que el láser es de luz verde y por tanto $\lambda = 550 \text{ nm}$, ¿qué velocidad de retroceso habría adquirido la Estrella de la Muerte al lanzar el rayo y cuál sería el incremento de velocidad del centro de masas de Alderaan al recibir el impacto del mismo? Datos: $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$, $M_{\text{Estrella Muerte}} = 10^{18} \text{ kg}$.

Los rayos iónicos

Una de las armas de los destructores imperiales es un “cañón iónico”, consistente en iones provenientes de un plasma lanzados a gran velocidad. Un plasma es un estado de la materia en el que los núcleos están totalmente ionizados, es decir, se han arrancado todos los electrones. Supongamos que los iones del rayo son núcleos de carbono 12 (masa = $2 \times 10^{-26} \text{ kg}$) que se lanzan a unos 1000 km/s contra la parte trasera del Halcón Milenario. El Halcón Milenario dispone de un “escudo de fuerza” que podemos modelar como si fuera un campo magnético homogéneo de 10 m de grosor perpendicular a la dirección longitudinal de la nave.



Si un rayo iónico va dirigido al centro de la parte trasera del Halcón Milenario:

f) ¿Cuánto debe valer el campo magnético para que los rayos no dañen la nave, es decir, para que no incidan en ningún punto de la zona de 5 m marcada con la doble flecha en el dibujo? Dato: carga de los núcleos de carbono-12 = $6 \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$.

g) ¿Cuánto debería valer ese campo magnético para que el rayo iónico volviese hacia el Destructor Imperial?

Resolución

a) Se define la aceleración media entre A y B como

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\vec{v}_B - \vec{v}_A}{\Delta t}.$$

En nuestro caso: $\vec{v}_A = (-v, 0)$; $\vec{v}_B = (0, v)$; $\vec{v}_C = (0, -v)$, donde $v = 300 \text{ m/s}$. Así:

$$\langle \vec{a} \rangle = 300 \cdot \frac{(1, 1)}{2}, \text{ cuyo módulo es}$$

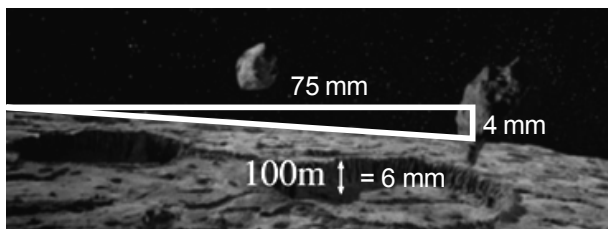
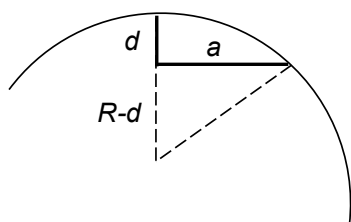
$$a = 212 \text{ m/s}^2 \approx 21g.$$

$$\text{Análogamente entre B y C: } \langle \vec{a} \rangle = \frac{\vec{v}_C - \vec{v}_B}{\Delta t} = 300 \cdot \frac{(0, -2)}{2}, \text{ cuyo módulo es}$$

$$a = 300 \text{ m/s}^2 \approx 30g.$$

En el primer caso la aceleración es $21g$ y en el segundo $30g$, donde g es la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre, lo que parece demasiado para que pudiera soportarlo un humano.

i) Hemos de averiguar el radio de una circunferencia conociendo solo una porción de arco.



Midiendo sobre la figura del enunciado con una regla podemos obtener directamente las distancias: $a = 75 \text{ mm}$ y $d = 4 \text{ mm}$, y podemos pasarlo a metros sabiendo que la altura del cráter mide 6 mm y representa 100 m en realidad:

$$a = 75 \text{ mm} \times 100 \text{ m} / 6 \text{ mm} = 1250 \text{ m},$$

$$d = 4 \text{ mm} \times 100 \text{ m} / 6 \text{ mm} = 67 \text{ m}.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo de la figura:

$$R^2 = (R - d)^2 + a^2 \rightarrow R = \frac{d^2 + a^2}{2d} = 11694 \text{ m} \approx 11,7 \text{ km}.$$

ii) Gravedad superficial:

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{G}{R^2} \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \approx 9,8 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2.$$

Velocidad de escape:

$$v = \sqrt{2gR} = 15 \text{ m/s}.$$

c) Llamemos dU a la energía potencial gravitatoria entre un casquete esférico de espesor dr , y masa dm , y la esfera de radio r , y masa $M(r)$:

$$dU = \frac{GM(r) dm}{r},$$

donde $dm = \rho 4\pi r^2 dr$ y $M(r) = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$.

Por tanto:

$$dU = G\rho^2 \frac{(4\pi)^2}{3} r^4 dr.$$

Para obtener la energía total gravitatoria almacenada por la esfera debemos integrar para toda la esfera:

$$U = \int_{\text{esfera}} dU = G\rho^2 \frac{(4\pi)^2}{3} \int_0^R r^4 dr = G\rho^2 \frac{(4\pi)^2}{3} \frac{R^5}{5}.$$

Y teniendo en cuenta la densidad $\rho = \frac{M}{4/3 \pi R^3}$, queda:

$$U = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}.$$

i) El trabajo necesario para separar todas las partículas elementales hasta el infinito es igual a la energía potencial calculada en el apartado anterior. Por tanto, esa energía será la que debe proporcionar el láser:

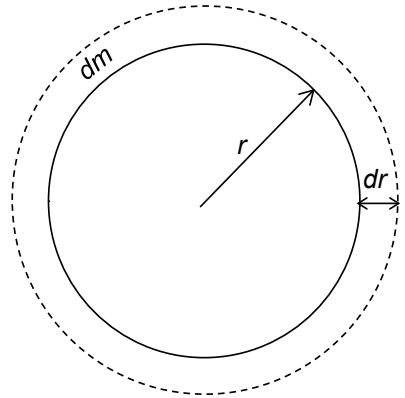
$$E_{\text{láser}} = U = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} = 2,24 \times 10^{32} \text{ J}.$$

La potencia del láser ha sido

$$P = \frac{E_{\text{láser}}}{t} = \frac{2,24 \cdot 10^{32} \text{ J}}{1 \text{ s}} = 2,24 \cdot 10^{32} \text{ W} = 5,6 \times 10^5 P_{\text{Sol}}.$$

ii) Si cuando las partículas que formaban el planeta están alejadas tienen en realidad una velocidad $v = 6371 \text{ km/s} = 6,371 \times 10^6 \text{ m/s}$, entonces la energía del láser se emplea en vencer la atracción gravitatoria y en dotar a las partículas de energía cinética:

$$E = U + T, \text{ donde } T = \frac{1}{2} M v^2 = 1,21 \times 10^{38} \text{ J}.$$



Luego: $E = U + T = 2,24 \cdot 10^{32} + 1,21 \cdot 10^{38} \approx 1,21 \times 10^{38} \text{ J}$.

Como actúa durante 1 s, la potencia es $P \approx 1,21 \times 10^{38} \text{ W}$.

e) En el apartado anterior hemos visto que la energía emitida por el rayo láser ha sido $E_{\text{láser}} = 1,21 \times 10^{38} \text{ J}$. Como cada fotón transporta una energía $E_{\gamma} = hf$, entonces el número total de fotones emitidos es $N = E_{\text{láser}} / E_{\gamma} = E_{\text{láser}} / hf$. Por otro lado, el momento total que transportan los fotones será el número total de fotones emitidos, N , por el momento que transporta cada fotón: $p_{\gamma} = E_{\gamma} / c = hf / c$. Entonces:

$$p = N p_{\gamma} = N \frac{hf}{c} = \frac{E_{\text{láser}}}{hf} \frac{hf}{c} = \frac{E_{\text{láser}}}{c} = \frac{1,21 \cdot 10^{38}}{3 \cdot 10^8} = 0,4 \times 10^{30} \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

Nótese que no ha hecho falta conocer h ni tampoco f .

Por conservación de la cantidad de movimiento, la Estrella de la Muerte debe adquirir esa misma cantidad de movimiento (con velocidad en sentido contrario al láser):

$$p = p_{\text{nave}} = M_{\text{nave}} v_{\text{nave}} \rightarrow v_{\text{nave}} = \frac{p}{M_{\text{nave}}} = 4 \times 10^{11} \text{ m/s}.$$

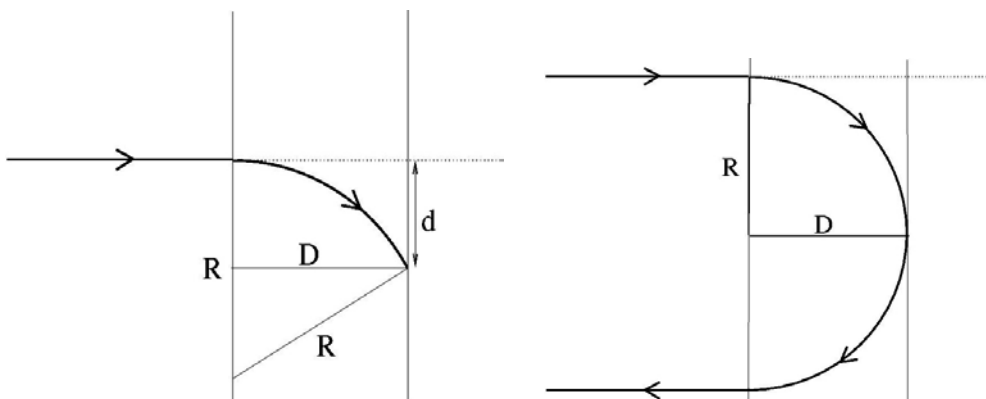
Nótese que la velocidad obtenida es superior a la de la luz, lo que sabemos que no es posible por la relatividad especial. Eso quiere decir que habría que hacer un cálculo más realista usando cinemática relativista y entonces la velocidad resultaría cercana a la de la luz pero inferior a ella.

Por otro lado, el incremento de velocidad del centro de masas del planeta Alderaán será:

$$\Delta v = \frac{p}{M_{\text{Alderaán}}} = 6,7 \times 10^4 \text{ m/s}.$$

f) La fuerza que sufre una partícula de carga q , con velocidad v en presencia de un campo magnético B perpendicular a la dirección de v es $F = qvB$, y es siempre perpendicular a la velocidad. Por tanto, toda la aceleración debida a esa fuerza es normal y describe un movimiento circular uniforme de radio R :

$$F = qvB = \frac{mv^2}{R} \rightarrow R = \frac{mv}{qB}.$$



El radio R debe de ser tal que la trayectoria no entre en la zona marcada con la doble flecha en la figura del enunciado. El caso límite ocurrirá cuando

$$R^2 = (R - d)^2 + D^2$$
$$\rightarrow R = \frac{D^2 + d^2}{2d} = \frac{10^2 + 5^2}{2 \cdot 5} = 12,5 \text{ m}.$$

(Nótese que la expresión es casualmente análoga a la del apartado b).

Y el campo magnético necesario para provocar una trayectoria con tal radio es

$$B = \frac{2 \cdot 10^{-26} \cdot 10^6}{6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 12,5} = 1,7 \times 10^{-3} \text{ T}.$$

g) Para que el rayo vuelva hacia el destructor imperial debe cambiar de sentido. Por tanto, según el dibujo adjunto ha de ocurrir que $R = D$, para lo cual se necesita un campo magnético

$$B = \frac{2 \cdot 10^{-26} \cdot 10^6}{6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10} = 2,1 \times 10^{-3} \text{ T}.$$

Saber más

Hay mucho material en internet discutiendo la física de las películas de *Star Wars*. Recuerda que la película es una fantasía y no pretende ser realista ni dar clases de física. Teniendo esto en mente, puedes divertirte viendo algunas discusiones sobre la física y encontrar algunos enlaces en:

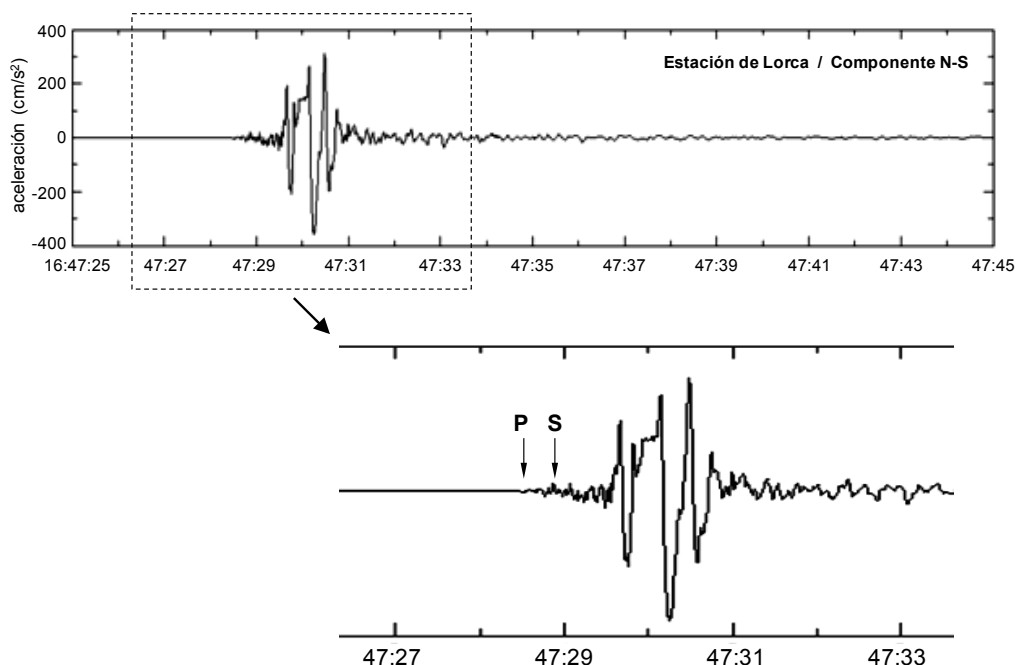
https://en.wikipedia.org/wiki/Physics_and_Star_Wars.

49. El terremoto de Lorca

En un terremoto se producen principalmente dos tipos de ondas sísmicas: transversales (ondas S) y longitudinales (ondas P). Para la mayor parte de terrenos se cumple aproximadamente que $v_P / v_S = \sqrt{3}$, donde v_P y v_S son las velocidades de propagación de las ondas P y S, respectivamente.

a) Sabiendo que en un sismógrafo se detectó la llegada de las ondas P y S con una diferencia de tiempo Δt , obtén la distancia, d , del sismógrafo al epicentro del terremoto en función de Δt y v_P .

b) La velocidad típica de las ondas P es aproximadamente de 6 km/s. Obtén el valor de la distancia d a partir del sismograma* de la figura, correspondiente al terremoto de Lorca de 2011. (El eje de abscisas representa la hora en minutos:segundos).



c) ¿Qué aceleración máxima registró el sismógrafo? Expresa el resultado en unidades de gravedad terrestre y compáralo con el valor de $0,12g$ previsto en la Norma de Construcción Sismorresistente.

Resolución

a) Si llamamos d a la distancia del epicentro del terremoto al sismógrafo, entonces el tiempo que tarda cada uno de los dos tipos de onda en recorrer esa distancia es

Onda S:
$$t_S = \frac{d}{v_S} = \frac{\sqrt{3}d}{v_P}.$$

Onda P:
$$t_P = \frac{d}{v_P}.$$

Por tanto, la diferencia de tiempos es

$$\Delta t = t_S - t_P = \frac{(\sqrt{3}-1)d}{v_P} \rightarrow d = \frac{v_P \Delta t}{\sqrt{3}-1}.$$

b) En el sismograma, Δt es la distancia temporal entre los puntos marcados como P y S. Podemos medir en la gráfica y obtener que este intervalo es aproximadamente $\Delta t \approx 0,37$ s. Por tanto,

$$d = \frac{6 \text{ km/s} \times 0,37 \text{ s}}{\sqrt{3}-1} \approx 3 \text{ km}.$$

El epicentro del terremoto se situó a unos 3 km de la estación sísmica de Lorca.

c) La aceleración máxima que registra la gráfica es $a \approx -360 \text{ cm/s}^2$. Expresándolo en función de la gravedad terrestre:

$$|a| = \frac{3,60 \text{ m/s}^2}{9,8 \text{ m/s}^2} g = 0,367 g,$$

es decir, 367 mg (mili-g), como suele también expresarse en sismología. Este valor de aceleración horizontal es el triple del contemplado en la normativa para la zona. Además, muchas construcciones son anteriores a la Norma Sismorresistente y, por tanto, todavía más vulnerables a un seísmo.

Saber más

Informe del Instituto Geológico Nacional (IGN) sobre el terremoto de Lorca de mayo de 2011: <http://www.ign.es/web/resources/sismologia/www/lorca/Lorcainfo2011.pdf>.

En ese informe, además de las características del terremoto, puedes encontrar información muy interesante sobre los antecedentes sísmicos de la región de Murcia, el riesgo sísmico y las fallas de la Región, etc.

Para más información sobre terremotos en España y el registro de todos los movimientos sísmicos en tiempo real puedes ver la página del IGN: <https://www.ign.es/>.

Para una monitorización de terremotos a nivel mundial puedes consultar la página web de la sección de terremotos del Servicio Geológico de Estados Unidos (USGS): <https://earthquake.usgs.gov/>.

* Los sismogramas suelen representar la aceleración del terreno en tres dimensiones: dos componentes horizontales (N-S y E-O) y una vertical (V). El sismograma mostrado corresponde a la dirección N-S donde las ondas fueron de mayor amplitud. La aceleración máxima registrada fue: N-S 360,4 mg, V 115,3 mg y E-O 150,8 mg.

Las ondas más fuertes tuvieron una frecuencia de unos 0,5 Hz (2 sacudidas por segundo). Estas oscilaciones producen la llamada “fracturación por cizalla” al hacer vibrar lateralmente los edificios. En terremoto de Lorca de 2011 fue tan destructivo, pese a no ser de gran magnitud, porque ocurrió a poca profundidad y las ondas superficiales fueron más intensas.

50. Cosas de ondas

a) El dial de un receptor de radio aparece graduado en una doble escala, una de ellas en kilohercios y la otra en metros. En la posición [864 kHz | 347 m] se capta una emisora. Calcula con estos datos la velocidad de la luz en el aire.

b) Un foco puntual de 10 W de potencia emite ondas sonoras que se propagan uniformemente en todas las direcciones. Calcula la intensidad del sonido y el correspondiente nivel de intensidad sonora a una distancia de 10 m del foco. Dato: $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.

c) Calcula a qué velocidad ha de volar un murciélago hacia su presa para que el efecto Doppler cause que la frecuencia que envía a 60 kHz la reciba a 61,8 kHz. Dato: velocidad del sonido = 340 m/s.

d) Sea un muelle con cierta constante elástica. Razona cuándo oscilará más rápido, al colgarle una masa de 100 g o una masa de 300 g.

e) Se deja caer una piedra desde una cierta altura sobre un estanque. Un tiempo τ después se deja caer sobre el mismo punto otra piedra idéntica. Describe cómo es la amplitud del patrón de interferencias de las ondas.

Resolución

a) Las escalas del receptor se refieren a la frecuencia de las ondas ($f = 864 \times 10^3 \text{ Hz}$) y a su longitud de onda ($\lambda = 347 \text{ m}$). Por tanto, la velocidad de las ondas electromagnéticas es

$$c = \lambda f = 347 \cdot 864 \cdot 10^3 = 2,998 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

b) El nivel de intensidad sonora o acústica es $L = 10 \log(I/I_0)$, donde la intensidad de las ondas es $I = P/4\pi r^2$, ya que la propagación es uniforme en el espacio (ondas esféricas). A una distancia $r = 10 \text{ m}$, y una potencia $P = 10 \text{ W}$, será

$$L = 10 \log\left(\frac{10}{4\pi \cdot 10^2 \cdot 10^{-12}}\right) = 99 \text{ dB}.$$

c) Las ondas emitidas por el murciélago se reflejan a modo de eco en la presa y regresan a él. Suponemos que la presa está en reposo. El murciélago viaja a velocidad v_m y la velocidad del sonido es $v = 340 \text{ m/s}$. El problema tiene dos partes:

1. Las ondas de frecuencia $f_0 = 60 \text{ Hz}$ emitidas por el murciélago (que se acerca al receptor, la presa) llegan a la presa con frecuencia

$$f_1 = \frac{v}{v - v_m} f_0.$$

2. Las ondas se reflejan en la presa y ésta hace ahora el papel de fuente de ondas de frecuencia f_1 que son percibidas por el murciélago (receptor que se acerca a la fuente) con frecuencia

$$f_2 = \frac{v + v_m}{v} f_1.$$

Por tanto, la frecuencia percibida por el murciélago en el eco es

$$f = f_2 = \frac{v + v_m}{v} \cdot \frac{v}{v - v_m} f_0 = \frac{v + v_m}{v - v_m} f_0.$$

Despejando la velocidad del murciélago:

$$v_m = \frac{f - f_0}{f + f_0} v \rightarrow v_m = \frac{61,8 - 60}{61,8 + 60} \cdot 340 = 5 \text{ m/s} = 18 \text{ km/h}.$$

En general, la frecuencia por efecto Doppler es

$$f = \frac{(v + v_m)(v - v_p)}{(v + v_p)(v - v_m)} f_0 \approx \left(1 + \frac{2(v_m - v_p)}{v} \right) f_0.$$

d) El período de oscilación de un muelle es proporcional a la raíz cuadrada de la masa suspendida:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Por tanto, cuanto menor sea la masa menor será también el período y el muelle oscilará más rápido. Con una masa de 100 g oscila más rápido que al colgar 300 g.

e) La suma de las dos ondas producidas en instantes separados un tiempo τ se puede escribir como

$$\begin{aligned} y(x, t) &= A \cos 2\pi(t/T - x/\lambda) + A \cos 2\pi((t + \tau)/T - x/\lambda) = \\ &= \underbrace{A \cos 2\pi(t/T - x/\lambda)}_{\alpha} + \underbrace{A \cos 2\pi(t/T - x/\lambda + \tau/T)}_{\beta}. \end{aligned}$$

Aplicando la igualdad trigonométrica

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

Queda

$$\begin{aligned} y(x, t) &= 2A \cdot \cos 2\pi(t/T - x/\lambda + \tau/2T) \cdot \cos 2\pi(-\tau/2T) = \\ &= \underbrace{2A \cos 2\pi(-\tau/2T)}_{A'} \cdot \cos 2\pi(t/T - x/\lambda + \tau/2T) \end{aligned}$$

que vuelve a ser una onda armónica de amplitud

$$A' = 2A \cos 2\pi(\tau/2T).$$

Si el tiempo τ es múltiplo del período de la onda, $\tau = nT$, entonces la interferencia es constructiva y $A' = 2A$. Si, por el contrario, τ es múltiplo impar del semiperíodo, $\tau = (2n + 1)T/2$, la interferencia es destructiva y $A' = 0$.

51. Ascensor espacial

Existen desde hace tiempo propuestas para construir un “ascensor espacial”. Su funcionamiento está basado en lo siguiente:

1. El ascensor consta de un cable muy largo, tenso y totalmente extendido perpendicularmente a la superficie de la Tierra desde un punto situado en el ecuador hasta un punto situado a una distancia R_H del centro de la Tierra (ver figura).

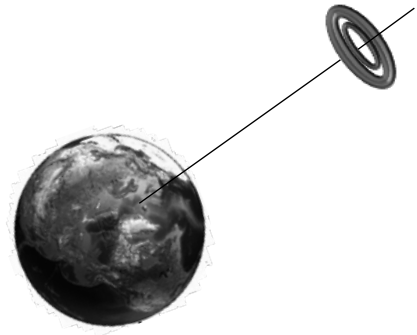
2. Cada porción del cable debe rotar con la misma velocidad angular, ω , que la Tierra, de tal forma que el cable está siempre vertical sobre el mismo punto del ecuador.

3. El cable se autosustenta; es decir, no está anclado al suelo ni se sujeta desde arriba con cohetes ni nada parecido (es un cable que levita). Ello es posible gracias al equilibrio entre el peso total del cable y la fuerza centrífuga total que actúa sobre él. (De todas formas, el cable se fijaría a una plataforma flotante anclada en el océano para evitar perturbaciones y hacer correcciones de órbita.)

4. Cada porción del cable está sometida al equilibrio entre el peso, la fuerza centrífuga y la fuerza de tensión.

5. El cable tiene una tensión variable a lo largo de su longitud, siendo nula la tensión en los dos extremos.

La idea es utilizar el cable como sustento para un montacargas acoplado a él y poder elevar cargas o lanzar naves espaciales al espacio. Hoy día, esta posibilidad es más viable gracias al descubrimiento de nuevos materiales ligeros y que pueden aguantar altas tensiones.



Datos y símbolos:

ω , velocidad angular de rotación de la Tierra sobre su eje.

M_T , masa de la Tierra = $5,97 \times 10^{24}$ kg.

R_T , radio de la Tierra = 6378 km.

R_g , radio de la órbita geoestacionaria.

R_H , distancia hasta donde se extiende el cable (medida desde el centro de la Tierra). La longitud del cable es $R_H - R_T$.

G , constante de gravitación universal = $6,67 \times 10^{-11}$ [S.I.].

P , peso (fuerza gravitatoria).

$F_c = m \omega^2 r$, fuerza ficticia centrífuga de una masa m en rotación.

T , tensión mecánica (fuerza por unidad de área) del cable.

a1) Obtén el radio R_g (distancia al centro de la Tierra) de la órbita geoestacionaria, en función de G , M_T y ω . Calcula su valor numérico en km.

a2) Calcula el valor de la gravedad en la órbita geoestacionaria.

El cable es cilíndrico de sección uniforme A y densidad constante ρ . Consideremos una porción de cable de longitud infinitesimal dr situada a una distancia r del centro de la Tierra.

b1) Obtén una expresión (en función de G , M_T , ω , ρ , A , r y dr) para el peso, dP , y para la fuerza centrífuga, dF_c , que experimenta dicha porción infinitesimal de cable.

b2) Integrando las expresiones anteriores respecto a r , calcula el peso total del cable, P , y la fuerza centrífuga total, F_c (en función de G , M_T , ω , ρ , A , R_T y R_H).

b3) Demuestra que el peso total del cable, P , respecto al peso que tendría si toda su masa estuviera en la superficie terrestre, P_0 , es

$$P / P_0 = \frac{R_T}{R_H}.$$

b4) Aproxima las dos expresiones de b2 para P y F_c , considerando $R_H \gg R_T$, de forma que $1/R_H \approx 0$ frente a $1/R_T$, y $R_T^2 \approx 0$ frente a R_H^2 .

b5) Partiendo de las expresiones aproximadas de b4, demuestra que la distancia R_H para que el cable esté en equilibrio (según se plantea en el punto 3 de la descripción del ascensor espacial) es

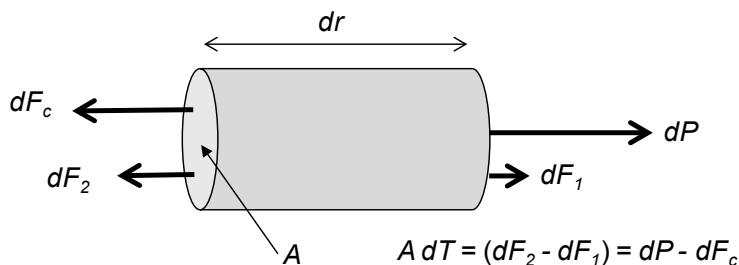
$$R_H = \sqrt{\frac{2R_g^3}{R_T}}.$$

Calcula el valor numérico de R_H en km.

b6) Si el cable no tiene la longitud adecuada no estará en equilibrio. En la figura se ilustran dos casos, A y B, del movimiento del cable respecto a la posición vertical de partida. Indica razonadamente cuál correspondería a un cable demasiado corto y cuál a un cable demasiado largo.



Considera el equilibrio de cada porción infinitesimal de cable, teniendo en cuenta que la fuerza neta debida a la tensión, $A dT$, sobre dicha porción es igual a su peso menos la fuerza centrífuga que experimenta, $dP - dF_c$.



c1) Obtén una expresión para dT/dr (utiliza los resultados de b1), y demuestra que la tensión máxima del cable ocurre en $r = R_g$.

c2) Integra dT/dr y obtén la tensión $T(r)$ en cualquier punto de la cuerda (en función de ω , ρ , R_T y R_g). Impón como condición de contorno en la integral que $T = 0$ en la superficie terrestre.

c3) Demuestra que la tensión máxima (en $r = R_g$) es

$$T_{\max} \approx \frac{GM_T}{R_T} \rho. \quad (\text{Ten en cuenta que } R_g \gg R_T).$$

En la tabla se muestran los valores de la tensión máxima soportable y la densidad de varios materiales:

	Acero	Cobre	Kevlar	Nanotubos de carbono
$T_{\text{ruptura}}(\text{MPa})$	5000	220	3600	130 000
$\rho (\text{g/cm}^3)$	7,9	8,9	1,4	1,3

c4) Teniendo en cuenta los datos de la tabla y el apartado c3, razona qué material podría utilizarse para construir el cable.

c5) Calcula la masa del cable con el material escogido en el apartado anterior, para un cable de sección de 1 cm de radio.

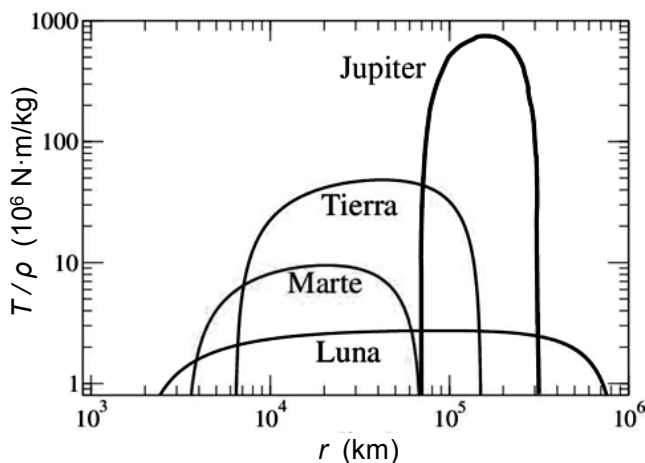
c6) Una parte del cable en su extremo más alejado (desde $R_C > R_g$ a R_H) se puede sustituir por una masa a modo de contrapeso, colocado a la distancia R_C , que compense el efecto de dicha porción de cable. Obtén la expresión de la masa de dicho contrapeso en función de A , ω , R_g y R_C .

En la siguiente figura se muestra la curva $T(r)/\rho$ para cables sobre la Tierra, la Luna, Marte y Júpiter.

d1) Completa una de las filas de la siguiente tabla (escoge el astro que prefieras) utilizando datos de la figura y haciendo cálculos con las ecuaciones del problema que consideres oportunas.

	R_A	R_g	R_H	L	$T_{\max}/\rho$	M_A	Período, τ_A
Luna							
Marte							
Júpiter							

R_A y M_A son el radio y la masa del astro, y L es la longitud del cable del ascensor. El período se refiere al período de rotación del astro sobre sí mismo.



d2) ¿En qué astro sería más largo el cable? ¿En qué astro el cable tendría que ser más resistente?

Utilizamos el ascensor para elevar un satélite y ponerlo en órbita geoestacionaria. El ahorro energético al utilizar el ascensor está en la parte de la energía cinética, puesto que el cable va arrastrando orbitalmente al satélite según asciende por él.

e1) Obtén la expresión de la energía necesaria para poner un satélite, de masa m , en órbita geoestacionaria (energía mecánica en la órbita menos energía potencial en la Tierra). Y obtén la expresión para la energía necesaria utilizando el elevador (energía potencial en la órbita menos energía potencial en la Tierra).

e2) Demuestra que la fracción de energía ahorrada si se utiliza el ascensor respecto a la energía necesaria sin el ascensor es

$$\frac{1}{2R_g/R_T - 1}.$$

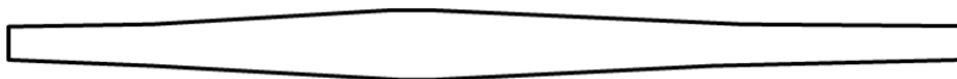
Calcula su valor numérico en %.

e3) ¿Cuánta energía por kilogramo se requiere para elevar con el ascensor una carga a una órbita geoestacionaria?

e4) Si la carga pesa 1000 kg y hacemos el viaje de ascenso en 1 semana, calcula la potencia media necesaria para subir la carga a la órbita geoestacionaria.

e5) Utilizamos un láser de electrones libres para proporcionar la energía. El elevador lleva unos paneles fotovoltaicos que transforman la luz láser en electricidad. La luz láser se envía hacia arriba, paralelamente al cable, con un espejo parabólico de forma que el haz se mantiene con un tamaño aproximadamente constante sobre los paneles (según va ascendiendo el elevador). Si el rendimiento de los paneles es del 20 %, ¿qué potencia debe tener el láser para subir la carga de e4).

Si en lugar de un cable cilíndrico se fabrica un cable con un perfil (de sección variable) similar al mostrado en la siguiente figura, se puede conseguir una tensión uniforme a lo largo del cable.



f1) ¿Por qué crees que este cable sería más adecuado desde el punto de vista del material?

f2) Sitúa en la figura las posiciones de la superficie terrestre, la órbita geoestacionaria y el extremo más alejado del cable.

Uno de los problemas con los cables es la vibración debida a posibles golpes. Supongamos que un satélite o un objeto de basura espacial chocan con el cable y excitan el modo fundamental de vibración de una onda estacionaria. Consideramos que los extremos del cable no vibran (fijos), y que la tensión es uniforme.

g1) Calcula el periodo (en días) de la oscilación producida si la tensión del cable tuviera el valor máximo dado en c3). (Utiliza que la velocidad de propagación de una onda en una cuerda viene dada por $v = \sqrt{T/\rho}$).

g2) Demuestra que: $\tau_{\text{vibración}} \approx \frac{\sqrt{2}}{\pi} \tau_{\text{rotación Tierra}}$, donde τ indica el período.

g3) La fuerza gravitatoria de la Luna induce mareas (oscilaciones pleamar-bajamar) con una determinada periodicidad (razona cuál es ese período aproximado). Según el valor obtenido en g1), ¿podría producir la Luna oscilaciones forzadas en el cable que pudieran romperlo? ¿Por qué?

Resolución

a1) La órbita geoestacionaria es aquella que su frecuencia angular coincide con la de rotación de la Tierra, ω . Un cuerpo estará en órbita cuando la atracción gravitatoria sea igual que la fuerza centrífuga:

$$P = F_c,$$

$$\frac{GMm}{R_g^2} = m\omega^2 R_g \rightarrow R_g = \left(\frac{GM}{\omega^2} \right)^{1/3} = \left(\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 5,97 \cdot 10^{24}}{(7,27 \cdot 10^{-5})^2} \right)^{1/3} = 42235 \text{ km},$$

donde hemos usado que $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7,27 \times 10^{-5} \text{ Hz}$.

a2) La aceleración de la gravedad a una distancia $r = R_g$ del centro de la Tierra será

$$g(r = R_g) = \frac{GM}{R_g^2} = \omega^2 R_g = 0,22 \text{ m/s}^2.$$

b1) Consideremos un elemento infinitesimal de cable de longitud dr a una distancia r del centro de la Tierra. Sobre él actúan dos fuerzas: el peso, dP , y la fuerza centrífuga, dF_c , dadas por

$$dP = \frac{GM_T}{r^2} dm = \frac{GM_T}{r^2} \rho A dr,$$

$$dF_c = \omega^2 r dm = \rho A \omega^2 r dr,$$

donde la masa del elemento infinitesimal de cable es $dm = \rho dV = \rho A dr$.

b2) Integrando las expresiones anteriores respecto de r desde R_T hasta R_H , tenemos el peso y la fuerza centrífuga total que experimenta el cable:

$$P = \int_{R_T}^{R_H} \frac{dP}{dr} dr = \int_{R_T}^{R_H} \frac{GM_T}{r^2} \rho A dr = GM_T \rho A \left[\frac{-1}{r} \right]_{R_T}^{R_H} = GM_T \rho A \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_H} \right),$$

$$F_c = \int_{R_T}^{R_H} \frac{dF_c}{dr} dr = \int_{R_T}^{R_H} \rho A \omega^2 r dr = \rho A \omega^2 \left[\frac{r^2}{2} \right]_{R_T}^{R_H} = \frac{\rho A \omega^2}{2} (R_H^2 - R_T^2).$$

b3) El cable tiene una masa total $m = \rho V = \rho AL$, donde $L = R_H - R_T$ es la longitud total del cable. El peso del cable si estuviera todo en la superficie de la Tierra sería

$$P_0 = \frac{GM_T}{R_T^2} m = \frac{GM_T}{R_T^2} \rho AL = \frac{GM_T}{R_T^2} \rho A (R_H - R_T).$$

Dividiendo el peso total del cable obtenido en el apartado anterior entre P_0 tenemos

$$\frac{P}{P_0} = \frac{R_T^2 \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_H} \right)}{(R_H - R_T)} = \frac{R_T^2 \left(\frac{R_H - R_T}{R_T R_H} \right)}{(R_H - R_T)} = \frac{R_T}{R_H}.$$

b4) Si $R_H \gg R_T$ podemos aproximar las expresiones del peso y la fuerza centrífuga:

$$P \approx \frac{GM_T \rho A}{R_T}, \quad F_c \approx \frac{\rho A \omega^2}{2} R_H^2.$$

b5) Para que el cable esté en equilibrio la fuerza neta total que actúa sobre todo el cable debe ser nula ($F_c = P$):

$$\frac{GM_T \rho A}{R_T} = \frac{\rho A \omega^2}{2} R_H^2 \rightarrow R_H = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T \omega^2}}.$$

Como del apartado a1 sabemos que $R_g^3 = GM_T / \omega^2$, obtenemos $R_H = \sqrt{\frac{2R_g^3}{R_T}}$.

Con el valor $R_g = 42235$ km del apartado a1, resulta

$$R_H = \sqrt{\frac{2 \times (42235 \text{ km})^3}{6378 \text{ km}}} = 153703 \text{ km}.$$

b6) Si el cable es demasiado corto: $P > F_c$, ya que la gravedad es menos relevante a largas distancias que la fuerza centrífuga, por lo que el cable tendería a caer hacia la Tierra lo que corresponde con la situación A del dibujo.

Análogamente, la situación B corresponde a un cable demasiado largo pues en ese caso $P < F_c$, y el cable tendería a escapar hacia el espacio.

* El razonamiento anterior sería suficiente para considerar correcta la respuesta, pero podemos demostrarlo matemáticamente con mayor rigor:

Veamos como varía la fuerza centrífuga y el peso total cuando variamos R_H en una cantidad pequeña, dR_H , respecto de la situación de equilibrio:

$$dP = \frac{dP}{dR_H} dR_H = GM_T \rho A \frac{1}{R_H^2} dR_H,$$

$$dF_c = \frac{dF_c}{dR_H} dR_H = \rho A \omega^2 R_H dR_H = \rho A \frac{GM_T}{R_T^3} R_H dR_H.$$

Por tanto:

$$dF_c - dP = GM_T \rho A \left(\frac{1}{R_T^3} - \frac{1}{R_H^3} \right) R_H dR_H.$$

El factor que multiplica a dR_H en la ecuación anterior es positivo, ya que $R_H > R_g$, y por tanto:

Si $dR_H > 0$, el cable se alarga y $dF_c > dP$. Si $dR_H < 0$, se acorta y $dF_c < dP$.

Es decir, si el cable se alarga respecto de la posición de equilibrio, la variación en la fuerza centrífuga es mayor que la variación el peso; por tanto, domina la fuerza centrífuga y el cable tiende a alejarse.

c1) Tal y como está definida T , fuerza neta por unidad de superficie que siente un elemento diferencial de cable, que llamaremos *tensión*, tenemos que

$$AdT = dP - dF_c = \frac{GM_T}{r^2} \rho A dr - \rho A \omega^2 r dr,$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{GM_T}{r^2} \rho - \rho \omega^2 r = \rho \omega^2 \left(\frac{R_g^3}{r^2} - r \right).$$

La tensión máxima ocurre cuando $\frac{dT}{dr} = 0$, es decir, cuando $\frac{R_g^3}{r^2} - r = 0 \rightarrow r = R_g$.

c2) Podemos calcular la tensión $T(r)$ en cualquier punto de la cuerda ya que sabemos su tasa de variación dT/dr así como el valor de T en $r = R_T$. Por tanto:

$$T(r) = \int \frac{dT}{dr} dr = \rho \omega^2 \int \left(\frac{R_g^3}{r^2} - r \right) dr = \rho \omega^2 \left(\frac{-R_g^3}{r} - \frac{r^2}{2} \right) + \text{cte}.$$

El valor de la constante lo obtenemos imponiendo la condición de contorno $T(r = R_T) = 0$:

$$\text{cte} = \rho \omega^2 \left(\frac{R_g^3}{R_T} + \frac{R_T^2}{2} \right).$$

Por tanto,

$$T(r) = \rho \omega^2 \left(\frac{-R_g^3}{r} - \frac{r^2}{2} + \frac{R_g^3}{R_T} + \frac{R_T^2}{2} \right).$$

c3) En el apartado c1 hemos obtenido que se alcanza la tensión máxima cuando $r = R_g$. Por tanto hemos de evaluar la expresión

$$T_{\max} = T(R_g) = \rho \omega^2 \left(\frac{-R_g^3}{R_g} - \frac{R_g^2}{2} + \frac{R_g^3}{R_T} + \frac{R_T^2}{2} \right) = \rho \omega^2 \left(\frac{-3R_g^2}{2} + \frac{R_g^3}{R_T} + \frac{R_T^2}{2} \right).$$

Usando que $R_g \gg R_T$ y que $R_g^3 = GM_T/\omega^2$, podemos aproximar

$$T_{\max} \simeq \rho \omega^2 \frac{R_g^3}{R_T} = \rho \frac{GM_T}{R_T}.$$

c4) Del apartado anterior podemos calcular el valor del cociente

$$\frac{T_{\max}}{\rho} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 5,97 \cdot 10^{24}}{6378 \cdot 10^3} = 6,2 \times 10^4 \text{ MPa} \cdot \text{cm}^3/\text{g}.$$

A partir de los datos de la tabla para los cuatro materiales, podemos calcular los cocientes T_{ruptura}/ρ , resultando los valores

	Acero	Cobre	Kevlar	Nanotubos de carbono
T_{ruptura}/ρ (MPa·cm ³ /g)	63,3	24,7	2571	10 ⁵

El único material que tiene un valor de T_{ruptura}/ρ mayor que $T_{\max}/\rho$ es el de nanotubos de carbono. Por tanto, ese es el único material que aguantaría la máxima tensión sin romperse.

c5) Para un cable cilíndrico de nanotubos de carbono, de longitud $L = R_H - R_T$ y densidad y sección constantes, la masa total será

$$m = \rho \pi r^2 (R_H - R_T) = 1,3 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot (10^{-2})^2 \cdot (153703 - 6378) \cdot 10^3 = 6 \times 10^4 \text{ toneladas}.$$

c6) En el dibujo se representan las fuerzas que actúan sobre el contrapeso situado a distancia R_C :



Estas fuerzas son:

- Sentido hacia la Tierra: fuerza, $A \cdot T$, debida a la tensión más el peso, P , de la masa m que hace de contrapeso.
- Sentido contrario a la Tierra: La fuerza centrífuga, F_c , del contrapeso.

Para que el contrapeso esté en equilibrio debe cumplirse

$$A \cdot T(r) + \frac{GM_T m}{r^2} = m \omega^2 r.$$

Y podemos despejar la masa $m = \frac{A \cdot T(r)}{\omega^2 r - GM_T / r^2}.$

Usando el resultado de c2 y que $R_g^3 = GM_T/\omega^2$, resulta

$$m = \frac{A}{\omega^2} \frac{\frac{-R_g^3}{r} - \frac{r^2}{2} + \frac{R_g^3}{R_T} + \frac{R_T^2}{2}}{r - \frac{R_g^3}{r^2}}.$$

Si el contrapeso está a distancia R_C , simplemente hay que sustituir $r = R_C$.

d1) De la figura extraemos directamente los valores de:

Radio del astro, R_A (donde empieza cada curva).

R_H (donde termina cada curva).

$T_{\max}/\rho$ (valor máximo que alcanza cada curva).

R_g (según c1 coincide con el valor de r donde la curva es máxima).

Las otras magnitudes las obtenemos tomando la longitud del cable: $L = R_H - R_A$. La masa M_A del astro la obtenemos del resultado del apartado c3: $M_A = T_{\max} R_A / G\rho$. Por último, el período lo obtenemos de $R_g^3 = GM_T/\omega^2$ teniendo en cuenta que $\omega = 2\pi/\tau$; así: $\tau_A = 2\pi\sqrt{R_g^3/GM_A}$.

Con todo lo anterior la tabla pedida, con valores aproximados (según la precisión con que podemos leer de la gráfica), es

	R_A (km)	R_g (km)	R_H (km)	L (km)	$T_{\max}/\rho$ (S.I.)	M_A (kg)	τ_A (días)
Luna	2300	$9 \cdot 10^4$	$9 \cdot 10^5$	$9 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^6$	10^{23}	28
Marte	3500	$2 \cdot 10^4$	$7 \cdot 10^4$	$6,6 \cdot 10^4$	10^7	$5 \cdot 10^{23}$	1,1
Júpiter	$7 \cdot 10^4$	$16 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^5$	$2,3 \cdot 10^5$	$7 \cdot 10^8$	$7 \cdot 10^{26}$	0,4

d2) En la Luna el cable tendría que ser más largo y en Júpiter más resistente.

e1) La energía, $E_{\sin}$, necesaria para poner un satélite en órbita geoestacionaria sin elevador es la diferencia entre la energía mecánica en la órbita y en la superficie:

$$E_{\sin} = E_g - R_T = \Delta E_p - \Delta E_c,$$

donde ΔE_p es la diferencia de energía potencial gravitatoria y ΔE_c la diferencia de energía cinética:

$$\Delta E_p = E_p(r = R_g) - E_p(r = R_T) = -\frac{GM_T m}{R_g} + \frac{GM_T m}{R_T},$$

$$\Delta E_c = E_c(r = R_g) - E_c(r = R_T) = \frac{1}{2} m \omega^2 R_g^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 R_T^2.$$

Por tanto,

$$E_{\sin} = GM_T m \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_g} \right) + \frac{m \omega^2}{2} (R_g^2 - R_T^2).$$

Y si despreciamos el término R_T^2 frente a R_g^2 (cometeríamos un error del 2 %) y usando $R_g^3 = GM_T/\omega^2$, tendríamos

$$E_{\sin} \approx GM_T m \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2R_g} \right).$$

Cuando sí se utiliza el elevador, el incremento de energía cinética lo aporta el cable, por tanto, la energía necesaria con elevador es

$$E_{\text{con}} = \Delta E_p + 0 = GM_T m \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_g} \right).$$

e2) La fracción de energía ahorrada si se utiliza el ascensor es

$$\frac{E_{\sin} - E_{\text{con}}}{E_{\sin}} = 1 - \frac{\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_g} \right)}{\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_g} \right) + \frac{1}{2R_g^3} (R_g^2 - R_T^2)}.$$

Que tras las aproximaciones adecuadas queda

$$\frac{E_{\sin} - E_{\text{con}}}{E_{\sin}} \approx \frac{1}{2R_g/R_T - 1} = 0,08.$$

Se ahorraría un 8 % de energía utilizando el ascensor como montacargas.

e3) Tenemos que calcular E_{con}/m del apartado e1 y el valor de R_g de a1:

$$\frac{E_{\text{con}}}{m} = GM_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_g} \right) = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \times \left(\frac{1}{6378} - \frac{1}{42235} \right) \cdot 10^{-3} = 53 \text{ MJ/kg}.$$

e4) Si $m = 1000 \text{ kg}$ y tarda una semana ($= 7 \times 24 \times 3600 = 604800 \text{ s}$) en subir, la potencia será

$$P = \frac{E_{\text{con}}}{t} = \frac{53 \cdot 10^6 \times 1000}{604800} \approx 88 \text{ kW}.$$

e5) Si el rendimiento es del 20 % significa que el 20 % de la potencia del láser debe ser el resultado de e4, por tanto, la potencia del láser ha de ser

$$P_{\text{láser}} = \frac{88}{0,2} \approx 440 \text{ kW}.$$

f1) Con el perfil de cable cilíndrico (sección uniforme), $A = \text{cte}$, hemos visto que hay que variar la tensión $T(r)$ para conseguir que la fuerza $A \cdot T$ equilibre la gravedad y la fuerza centrífuga.

Ahora, si dejamos fija T en un valor menor que el T_{max} anterior, podremos conseguir que $A \cdot T$ equilibre la gravedad y la fuerza centrífuga si permitimos que la sección sea una función de r . Así necesitaremos un material menos resistente.

f2) Hemos visto en el apartado c1 que cuando $A = \text{cte}$ la tensión máxima se alcanzaba en $r = R_g$. Es decir, en ese punto la fuerza $A \cdot T$ es máxima. Si ahora hacemos $T = \text{cte}$, necesitaremos que A sea máxima para que $A \cdot T$ siga siendo máxima. Es decir, la anchura máxima del cable estará en $r = R_g$:



g1) El modo fundamental de una cuerda fija en sus extremos ocurre cuando la longitud de onda satisface

$$L = \frac{\lambda}{2} \rightarrow \lambda = 2L,$$

que corresponde a un período

$$\tau_{\text{vibración}} = \frac{\lambda}{v} = \frac{2L}{\sqrt{T/\rho}} = \frac{2 \times 147325 \cdot 10^3}{\sqrt{62 \cdot 10^6}} = 37420 \text{ s} = 10,4 \text{ h.}$$

(Donde hemos utilizado el resultado de c4).

g2) Usando los resultados obtenidos en apartados anteriores:

$$\tau_{\text{vibración}} = \frac{2L}{\sqrt{T/\rho}} = \frac{2(R_H - R_T)}{\frac{GM_T}{R_T}} = \frac{2 \left(\sqrt{\frac{2GM_T}{R_T \omega^2}} - R_T \right)}{\frac{GM_T}{R_T}} \approx \frac{\sqrt{2}}{\pi} \tau_{\text{rotación}},$$

con $\omega = 2\pi / \tau_{\text{rotación}}$ y $\tau_{\text{rotación}}$ el período de rotación de la Tierra.

g3) El periodo de la oscilación inducida por la Luna en el cable sería del orden del periodo de la marea lunar, que es aproximadamente de 12 horas (más exactamente de 12,4 h). Este valor es parecido al obtenido en el apartado g1 (10,4 horas). Por tanto, sí hay riesgo de rotura del cable por efecto de resonancia. La configuración de cable más corto con contrapeso (apartado c6) sería más adecuada.

Saber más

Para una discusión más amplia sobre la física del ascensor espacial, aunque similar a la desarrollada en el problema, puedes consultar el artículo:

Aravind, P.K. (2007). "The physics of the space elevator". *American Journal of Physics* 75, pp. 125-130.

En el año 2003 la NASA emitió un informe sobre la viabilidad de llevar a cabo un proyecto de ascensor espacial, desde el punto de vista técnico, económico, etc., que se puede consultar en: <http://www.niac.usra.edu/studies/521Edwards.html>.

Hay un consorcio internacional que se dedica al estudio de todo lo relacionado con ascensores espaciales, el *International Space Elevator Consortium (ISEC)*. Ahí puedes encontrar información sobre la historia, líneas de investigación, futuros proyectos, etc.: <https://isec.org/>.

52. A vueltas con el átomo de Rutherford

En el modelo atómico de Rutherford el electrón describe una órbita circular alrededor del núcleo debido a la fuerza de Coulomb (que ejerce como fuerza centrípeta). Considera un átomo de hidrógeno (un protón en el núcleo) con el electrón en una órbita de radio r . El electrón tiene carga e y masa m_e . Obtén (en función de m_e , e , r , ε_0 y, en su caso, μ_0):

a) La velocidad del electrón en la órbita.

b) La intensidad de corriente efectiva que crea el electrón en su trayectoria.

c) El campo magnético creado por la corriente (como si fuera una espira) sobre el protón del núcleo.

Ahora pasamos a considerar aspectos energéticos.

d) Obtén la energía potencial eléctrica y la energía total del electrón en la órbita (en función de ε_0 , e y r).

El radio de la primera órbita del átomo de hidrógeno es $r_0 = 0,53 \times 10^{-10}$ m.

e) Calcula la energía total del electrón en la primera órbita (en eV). Datos: $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ C²/N·m², $e = -1,6 \times 10^{-19}$ C.

Según la teoría electromagnética clásica, cualquier carga q acelerada emite radiación electromagnética con una potencia dada por la fórmula de Larmor:

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3},$$

donde a es la aceleración de la carga y c la velocidad de la luz. Así, un electrón en una órbita circular, debido a su aceleración centrípeta emitiría radiación e iría perdiendo energía realizando un movimiento en espiral hasta caer al núcleo. Por ello, el modelo de Rutherford no es correcto, porque el átomo sería inestable.

Al perder energía por emisión de radiación electromagnética, la órbita del electrón tendría un radio decreciente $r(t)$, partiendo de $r(0) = r_0$ y llegando a $r(\tau) = 0$ tras un tiempo τ que indica la vida del átomo inestable.

f) Obtén la variación del radio de la órbita dr/dt .

Ayuda: A partir de la energía total del electrón en una órbita de radio $r(t)$ (apartado e), deriva respecto al tiempo e iguala a la potencia de la fórmula de Larmor.

g) Integra la expresión obtenida en el apartado anterior y calcula la vida del átomo inestable de Rutherford partiendo de una órbita de radio r_0 . Calcula dicho tiempo, τ , con los datos proporcionados. Dato: $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg.

Resolución

a) Igualamos la fuerza electrostática de Coulomb (entre protón y electrón) y la fuerza centrípeta, y despejamos la velocidad del electrón en la órbita:

$$\left| \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-e)e}{r^2} \right| = m_e \frac{v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}}.$$

b) La intensidad de corriente es $I = q/t$. La carga es la del electrón, e , y el tiempo es el empleado por el electrón en completar una órbita (es decir, el período orbital):

$$t = \frac{2\pi r}{v}.$$

Utilizando la expresión de la velocidad encontrada antes, la intensidad efectiva queda

$$I = \frac{e}{2\pi r} v = \frac{e^2}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 m_e r^3}}.$$

c) El campo magnético creado por una espira, en su centro (donde estaría el protón), por la que circula la corriente hallada anteriormente es

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{r} = \frac{\mu_0 e^2}{4\pi} \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 m_e r^5}}.$$

d) La energía potencial eléctrica y la energía cinética son

$$E_p = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r},$$

$$E_c = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}.$$

Entonces, la energía total del electrón en la órbita es

$$E = E_p + E_c = \frac{-1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}.$$

e) Particularizando para la primera órbita ($r_0 = 0,53 \times 10^{-10}$ m), la energía total del electrón vale

$$E = \frac{-1}{8\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{0,53 \cdot 10^{-10}} = -13,6 \text{ eV}.$$

f) Para obtener la potencia radiada por el electrón en la órbita, derivamos respecto al tiempo la expresión de la energía en la órbita:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \frac{dr(t)}{dt}.$$

Igualamos esta expresión a la potencia de la fórmula de Larmor (con signo negativo, pues se trata de una pérdida):

$$\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \frac{dr(t)}{dt} = -\frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2 a^2}{c^3}.$$

La aceleración del electrón es su aceleración centrípeta:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = m_e a \rightarrow a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e r^2}.$$

Despejamos la variación del radio de la órbita y utilizamos la expresión de la aceleración:

$$\frac{dr(t)}{dt} = -\frac{4}{3} \frac{a^2 r^2}{c^3} = -\frac{4}{3} \frac{r^2}{c^3} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e r^2} \right)^2 = \frac{-1}{12\pi^2 \epsilon_0^2 c^3 m_e^2} \frac{e^4}{r^2}.$$

g) Para calcular la vida del átomo inestable de Rutherford, integramos la expresión anterior:

$$\int_{r_0}^0 r^2 dr(t) = \frac{-e^4}{12\pi^2 \epsilon_0^2 c^3 m_e^2} \int_0^\tau dt \rightarrow \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r_0}^0 = \frac{-e^4}{12\pi^2 \epsilon_0^2 c^3 m_e^2} [t]_0^\tau$$

$$\frac{r_0^3}{3} = \frac{e^4}{12\pi^2 \epsilon_0^2 c^3 m_e^2} \tau \rightarrow \tau = \frac{4\pi^2 \epsilon_0^2 c^3 m_e^2 r_0^3}{e^4} = 1,6 \times 10^{-11} \text{ s}.$$

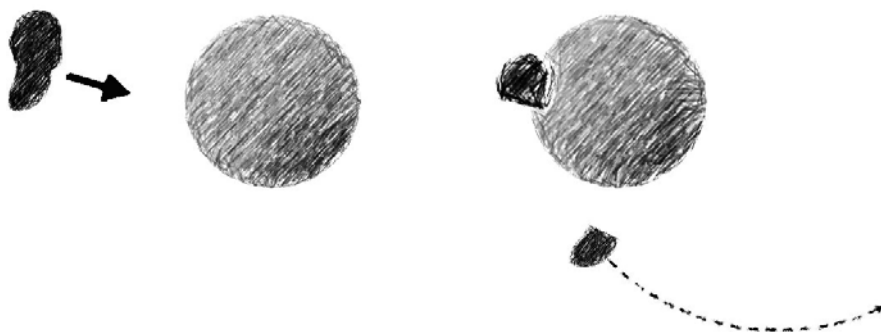
Saber más

Hemos comprobado que el átomo de Rutherford es altamente inestable desde el punto de vista clásico. Por ello, este modelo fue pronto reemplazado por el de Bohr, que es un modelo semicuántico en el que el electrón sólo puede ocupar ciertas órbitas permitidas estables, y puede realizar transiciones entre ellas (lo que permitía explicar los espectros atómicos). Finalmente, con la ecuación de Schrödinger y el desarrollo de la mecánica cuántica se pudo explicar la estructura atómica de forma más general y coherente.

No obstante, el modelo de Rutherford tuvo una enorme importancia. Fue la primera vez que se propuso la existencia de un núcleo central en el átomo con la carga positiva concentrada en él, lo que permitía explicar el experimento de dispersión de partículas alfa al atravesar una delgada lámina de oro. El modelo presentaba además al átomo como una estructura prácticamente vacía. Por otro parte, el problema de cómo un conjunto de cargas positivas podían mantenerse unidas en un volumen tan pequeño como el núcleo condujo al descubrimiento posterior de la fuerza nuclear fuerte.

53. Una hipótesis sobre la formación de la Luna

La *teoría del gran impacto* sobre el origen de la Luna sostiene que ésta se formó de un astro que se rompió al impactar con la Tierra. Si admitimos la hipótesis, supón además que: 1) el astro y la Tierra, antes del impacto, tenían temperaturas uniformes de $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ y $2000\text{ }^{\circ}\text{C}$, respectivamente; y 2) una porción del astro con una masa igual al 10 % de la masa terrestre se fusionó con la Tierra tras el impacto.



Considera que la Tierra y el astro tienen el mismo calor específico, igual al de la roca: $879\text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$.

Si despreciamos, de momento, la energía cinética del astro:

a) Calcula la temperatura final de la Tierra tras incorporar la masa extra, por puro intercambio de calor.

Ahora suponemos que el astro impactó con la Tierra a una velocidad igual a la velocidad de escape de la Tierra.

b) Calcula la energía cinética de la porción del astro que se une a la Tierra (justo antes del impacto). Datos: radio de la Tierra = 6371 km , masa de la Tierra = $5,97\times 10^{24}\text{ kg}$.

Suponemos que la porción fusionada, tras el choque inelástico, cedió el 5 % de su energía cinética en forma de calor.

c) Calcula de nuevo la temperatura final de la Tierra.

Resolución

a) La Tierra tiene masa M_T y una temperatura inicial de $2000\text{ }^{\circ}\text{C}$. El trozo del astro que se une tiene una masa $0,1M_T$ y temperatura inicial de $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Tras la unión, el calor cedido por la Tierra es igual al calor ganado por el trozo del astro, tras alcanzarse una temperatura T de equilibrio:

$$M_T c_e (2000 - T) = 0,1M_T c_e (T - 0).$$

Despejando la temperatura, obtenemos

$$1,1T = 2000 \rightarrow T = 1818\text{ }^{\circ}\text{C}.$$

La Tierra se enfriaría un poco al incorporar el trozo de astro inicialmente a $0\text{ }^{\circ}\text{C}$.

b) El astro antes del impacto lleva una velocidad igual a la de escape de la Tierra:

$$v = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2g_0 R_T} = 11,2 \text{ km/s}.$$

Y, por tanto, su energía cinética sería

$$E_c = \frac{1}{2} 0,1M_T v^2 = 0,1M_T g_0 R_T = 0,1 \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 9,8 \cdot 6371 \cdot 10^3 = 3,7 \times 10^{31} \text{ J}.$$

c) Al balance energético del primer apartado hemos de añadir, como calor aportado, el 5 % de energía cinética del trozo de astro:

$$\begin{aligned} M_T c_e (2000 - T) + 0,05 E_c &= 0,1 M_T c_e (T - 0) \\ \rightarrow c_e (2000 - T) + 0,05 \cdot 0,1 g_0 R_T &= 0,1 c_e T. \end{aligned}$$

Despejamos de nuevo la temperatura:

$$1,1T = 2000 + 0,005 \frac{g_0 R_T}{c_e} \rightarrow T = 1818 + 0,005 \frac{9,8 \cdot 6371}{879} = 2141 \text{ }^\circ\text{C}.$$

En este caso, la Tierra se calentaría. La energía aportada por el impacto es suficiente para elevar las temperaturas de la Tierra y del astro a un valor de equilibrio por encima de 2000 °C.

Saber más

Esta es sólo una hipótesis, no confirmada, del posible origen de la Luna. Otras hipótesis proponen que la Luna se formó a partir de masa desprendida de la Tierra, o a partir de masa proveniente del exterior atrapada poco a poco en la órbita terrestre.

Aunque el modelo térmico utilizado en este problema es muy simple y no tiene en cuenta, entre otros, los procesos de fusión y vaporización que ocurrirían tras el fuerte impacto, sí nos da una idea del orden de magnitud de alguna de las variables implicadas en un fenómeno de este tipo.

Pasa saber más sobre la formación de la Tierra y la Luna, se puede consultar el siguiente libro disponible en formato electrónico:

Pritchard M.E. y Stevenson D.J., eds. (2000). "Origin of the Earth and Moon". University of Arizona Press.

54. Ondas gravitacionales

Una de las noticias científicas más importantes de 2016 fue la detección directa, y por primera vez, de las llamadas *ondas gravitacionales*. El hallazgo se realizó mediante el experimento LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*), que registró las ondas producidas por la fusión de dos agujeros negros que rotaban en espiral uno alrededor del otro. Aunque la física del fenómeno requiere el conocimiento de la teoría de la relatividad general y de matemáticas complicadas, podemos considerar para este problema la física newtoniana de bachillerato.

Una onda gravitacional es la propagación de la perturbación de la métrica del espacio-tiempo originada cuando se acelera una masa (de forma análoga a una onda electromagnética, que se produce cuando se acelera una carga eléctrica). Ahora no importa conocer la naturaleza de dicha perturbación, basta con saber que se puede describir mediante la ecuación de una onda transversal armónica que viaja a la velocidad de la luz, c .

Los agujeros negros son cuerpos muy masivos, así que pueden emitir gran cantidad de energía cuando están sometidos a aceleración (como, por ejemplo, la aceleración centrípeta en un movimiento orbital). Las ondas detectadas por el LIGO corresponden a un sistema binario de dos agujeros negros de masas $m_1 = 36M_{\text{Sol}}$ y $m_2 = 29M_{\text{Sol}}$, que rotan respecto a su centro de masas y, por tanto, emiten ondas gravitacionales. La pérdida de energía mecánica orbital en forma de ondas gravitacionales implica que las órbitas son espirales de radio decreciente. Llega un momento en que los dos agujeros negros se unen en un único agujero de masa $62M_{\text{Sol}}$. La mayor parte de la energía en forma de ondas gravitacionales se emite en la parte final del proceso de fusión, aproximadamente en las últimas 2 centésimas de segundo. En esa última fase toda la energía liberada proviene aproximadamente de la fracción de la masa de los agujeros que se pierde.

a) Un agujero negro es un objeto cuya masa está concentrada en un radio tan pequeño que su velocidad de escape es la de la velocidad de la luz. A ese radio se le conoce como *radio de Schwarzschild*. ¿Cuál es el radio de Schwarzschild de los dos agujeros antes de la colisión? ¿Y el radio del agujero negro resultante? Datos: $G = 6,67 \times 10^{-11}$ [S.I.], $M_{\text{Sol}} = 2 \times 10^{30}$ kg.

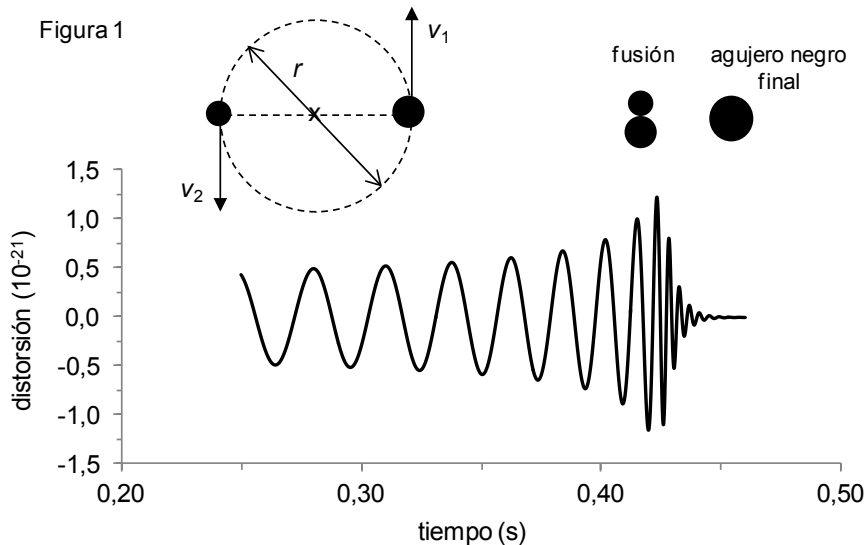
Según la teoría de la relatividad especial, una cierta cantidad de masa se puede convertir en energía, dada por la famosa ecuación $E = mc^2$.

b1) ¿Qué potencia promedio se ha liberado en forma de ondas gravitacionales en la fase final (últimas 2 centésimas de segundo) debido a la pérdida de masa en el proceso de fusión descrito anteriormente?

b2) ¿Cuántos años tardaría nuestro Sol en emitir la energía liberada en la fusión de los dos agujeros negros sabiendo que el Sol radia ondas electromagnéticas con una potencia de 4×10^{26} W? Compara el resultado con la edad del universo, 14 000 millones de años.

b3) ¿A qué distancia de la Tierra (en años-luz) estaba el sistema binario de agujeros negros sabiendo que el LIGO detectó las ondas provenientes de la fase final con una intensidad de $0,013 \text{ W/m}^2$? Compara con el diámetro de nuestra galaxia, cien mil años-luz. (Un año luz es la distancia que recorre la luz en un año.)

La figura 1 muestra el proceso durante los 0,17 s anteriores a la fusión de los agujeros negros. La curva representa la amplitud de la onda gravitacional detectada en la Tierra en función del tiempo.

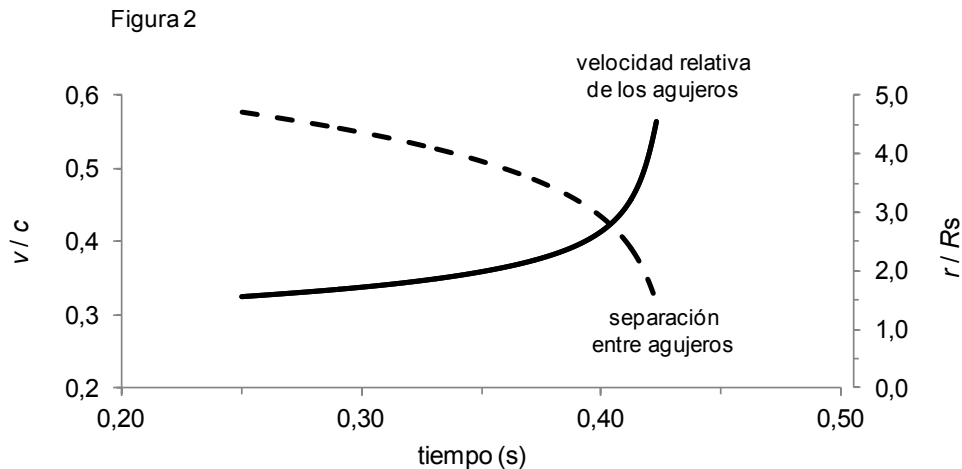


c1) Estima (aproximadamente a partir de la gráfica) la frecuencia y la longitud de onda en el instante inicial de la onda gravitacional.

Como las masas de los agujeros negros son parecidas ($m_1 \approx m_2$), podemos considerar que ambos están rotando en una órbita circular alrededor de su centro de masas con velocidades

$$v_1 = v_2 = \frac{v}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{GM}{r}} \text{ , donde } M = m_1 + m_2 \text{ .}$$

c2) Demuestra que la energía mecánica total del sistema binario es $E = \frac{-GM^2}{8r}$.



En la figura 2 se representa la velocidad relativa entre los dos agujeros, $v(t)$, donde $v = |v_1| + |v_2|$, y la distancia $r(t)$ entre los agujeros negros (v está dado en unidades de la velocidad c de la luz en el vacío, y r en unidades del radio de Schwarzschild R_s del agujero negro final).

c3) Calcula la frecuencia de rotación de los agujeros negros alrededor de su centro de masas en el instante inicial y compáralo con el valor de la frecuencia de la onda gravitacional estimada en el apartado c1.

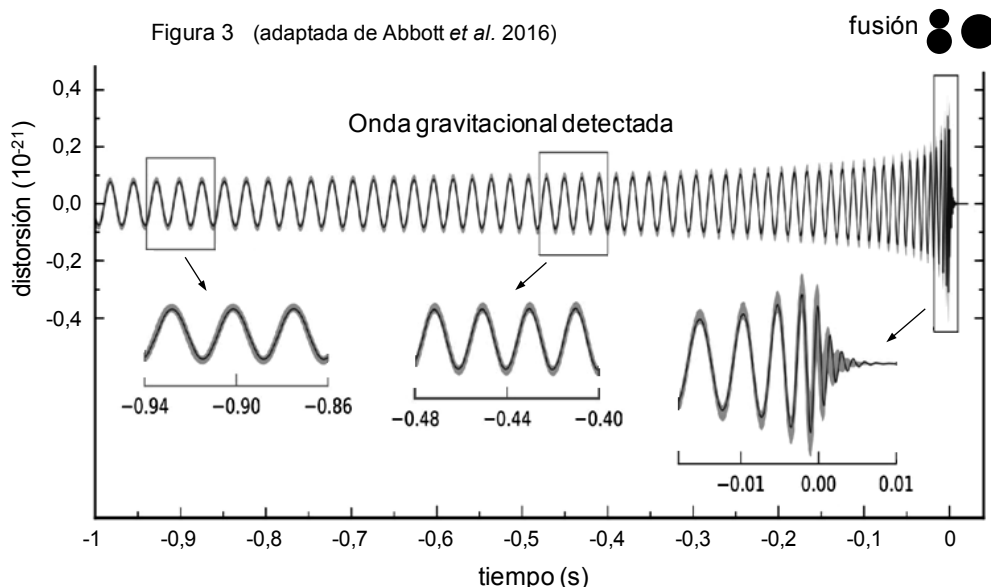
c4) En relatividad general se demuestra que la potencia emitida en forma de ondas gravitacionales por este sistema binario es aproximadamente

$$P = \frac{dE}{dt} = -\frac{2}{5} \frac{G^4 M^5}{c^5 r^5}.$$

Obtén una expresión para dr/dt en función de r . Integrando respecto del tiempo obtén $r(t)$ y compara el resultado con la curva de la figura 2.

*Ayuda: Deriva la expresión de la energía de c2 utilizando la identidad matemática $dE/dt = (dE/dr) \cdot (dr/dt)$. Despeja dr/dt en función de r , separa la ecuación en la forma $f(r)dr = dt$, e integra para obtener $r(t)$.

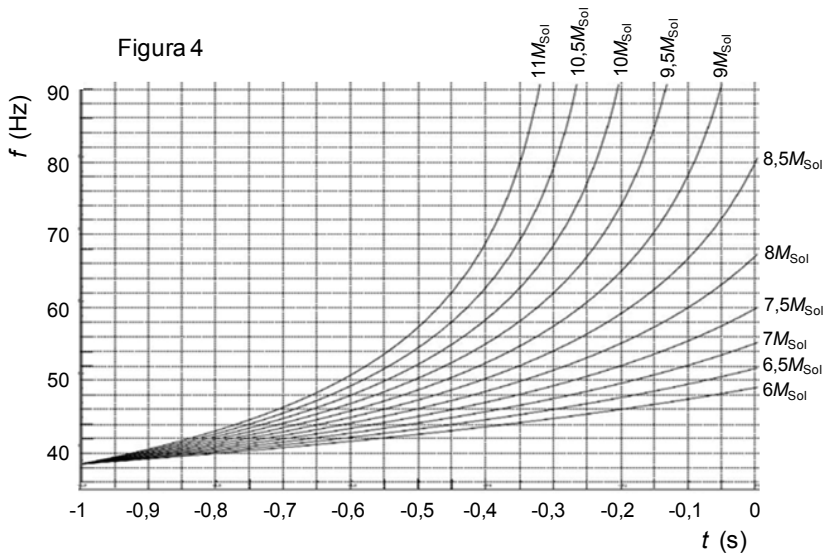
Unos meses después, el LIGO detectó otra onda gravitacional proveniente de la fusión de un sistema binario de agujeros negros diferente al anterior. La señal detectada se muestra en la figura 3, donde el origen de tiempos está en el momento de la fusión. Los recuadros son zonas de la gráfica ampliadas para ver más detalle.



Mediante cálculos de relatividad general se puede obtener la frecuencia de las ondas gravitacionales emitidas en función del tiempo. Dicha frecuencia está representada en la figura 4 para varios valores de lo que se conoce como la *chirp mass*:

$$M_c = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}}, \text{ desde } M_c = 6M_{\text{Sol}} \text{ hasta } M_c = 11M_{\text{Sol}} \text{ en intervalos de } 0,5M_{\text{Sol}}.$$

d1) A partir de los datos del recuadro central en la figura 3 y usando la figura 4, obtén la masa M_c . Estima su error asignando un error del 4 % a la frecuencia de la onda.



d2) Sabiendo que la masa total del agujero negro después de la fusión es $20,8M_{\text{Sol}}$ y que se ha perdido en el proceso de fusión un 5 % de la masa, obtén las masas m_1 y m_2 de los dos agujeros negros originales.

Resolución

a) Por definición el radio de Schwartzchild, R_S , es el radio para el cual la velocidad de escape es la velocidad de la luz en el vacío. Tomando $v = c$ en la expresión de la velocidad de escape, podemos despejar el radio:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \rightarrow R_S = \frac{2GM}{c^2}.$$

Para los agujeros negros antes de la colisión:

$$R_S(m_1) = \frac{2Gm_1}{c^2} = \frac{2G}{c^2} 36M_{\text{Sol}} \approx 107 \text{ km},$$

$$R_S(m_2) = \frac{2Gm_2}{c^2} = \frac{2G}{c^2} 29M_{\text{Sol}} \approx 86 \text{ km}.$$

Para el agujero negro resultante después de la colisión:

$$R_S(M) = \frac{2G}{c^2} 62M_{\text{Sol}} \approx 184 \text{ km}.$$

b1) La masa del agujero negro final es menor que la suma de las masas de los agujeros negros iniciales. La diferencia de masas es

$$m_1 + m_2 - M = 3M_{\text{Sol}},$$

que se convierte en energía según la ecuación de Einstein, luego

$$E = (3M_{\text{Sol}})c^2 = 5,4 \times 10^{47} \text{ J}.$$

Como esa energía se ha liberado en 2 centésimas de segundo, la potencia es

$$P = \frac{E}{t} = \frac{5,4 \cdot 10^{47}}{0,02} = 2,7 \times 10^{49} \text{ W}.$$

b2) Si el Sol radia con una potencia P_{Sol} , tardaría un tiempo

$$t = \frac{E}{P_{\text{Sol}}} = \frac{5,4 \cdot 10^{47}}{4 \cdot 10^{26}} = 1,35 \cdot 10^{21} \text{ s} = 4,26 \times 10^7 \text{ millones de años}$$

en emitir la energía liberada por los agujeros negros. Como la edad del universo es aproximadamente 14 000 millones de años, entonces ese tiempo sería unas 3000 veces la edad de universo.

b3) La intensidad es la energía por unidad de superficie y tiempo que llega a la Tierra y, como el frente es esférico, tenemos que

$$I = \frac{P}{4\pi d^2} \rightarrow d = \sqrt{\frac{2,7 \cdot 10^{49}}{4\pi \cdot 0,013}} = 1,3 \times 10^{25} \text{ m}.$$

Un año luz es la distancia que recorre la luz en un año: $3 \cdot 10^8 \times 1 \text{ año} = 9,46 \times 10^{15} \text{ m}$. Por tanto,

$$d = \frac{1,3 \cdot 10^{25} \text{ m}}{9,46 \cdot 10^{15} \text{ m/año-luz}} = 1360 \text{ millones de años-luz}.$$

Comparado con el diámetro de la vía Láctea:

$$\frac{1360 \cdot 10^6}{10^5} = 13\,600 \text{ veces más lejos,}$$

lo que da cuenta de la escala de estos extraordinarios sucesos.

c1) La distancia entre las dos primeras crestas de la figura 1 es el periodo, T , pedido. Midiendo con una regla obtenemos $T \approx 0,026 \text{ s}$, que corresponde a una frecuencia $f = 1/T \approx 38 \text{ Hz}$, y como se propaga a la velocidad de la luz corresponde a una longitud de onda $\lambda = cT = 3 \cdot 10^8 \cdot 0,026 \approx 7800 \text{ km}$.

c2) La energía total del sistema será la suma de la energía potencial entre la masa 1 y 2, y las energías cinéticas de cada una de ellas:

$$E = -G \frac{m_1 m_2}{r} + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2,$$

donde r es la separación entre los agujeros negros (ver esquema en figura 1 del enunciado). Como $m_1 = m_2$ y $M = m_1 + m_2$, entonces $m_1 = m_2 = M/2$ y, por tanto, la energía queda

$$E = -G \frac{M^2}{4r} + \frac{1}{2} \frac{M}{2} v_1^2 + \frac{1}{2} \frac{M}{2} v_2^2,$$

y usando el dato del enunciado, $v_1 = v_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{GM}{r}}$, se llega a

$$E = -G \frac{M^2}{8r}.$$

c3) El periodo será el tiempo que tarda el agujero negro 1 en dar una vuelta con velocidad v_1 alrededor de un círculo de radio $r/2$ (ídem para el agujero negro 2):

$$T = \frac{2\pi r}{v_1} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}.$$

De la gráfica de la figura 2 obtenemos $r \approx 4,7R_S$. La masa es $M = m_1 + m_2$ y, del apartado a, el radio es $R_S \approx 184 \text{ km}$, con lo que resulta un período: $T = 0,054 \text{ s}$, y una frecuencia $f = 18,5 \text{ Hz}$, que es aproximadamente la mitad de la frecuencia de la onda gravitacional obtenida en el apartado c1.

c4) De la identidad $\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dr} \frac{dr}{dt}$, despejamos $\frac{dr}{dt} = \frac{dE/dt}{dE/dr}$.

El numerador lo da el enunciado y el denominador lo obtenemos del apartado c2:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2 G^4 M^5}{5 c^5 r^5},$$

$$E = -G \frac{M^2}{8r} \rightarrow \frac{dE}{dr} = G \frac{M^2}{8r^2}.$$

Por tanto,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{-\frac{2 G^4 M^5}{5 c^5 r^5}}{\frac{GM^2}{8r^2}} = -\frac{16}{5c^5} \left(\frac{GM}{r} \right)^3 = \alpha \frac{1}{r^3},$$

donde $\alpha = -\frac{16 G^3 M^3}{5 c^5}$ es una constante. Entonces, separando la ecuación como sugiere el enunciado, tenemos que

$$r^3 dr = -\alpha dt.$$

Integrando los dos lados de la igualdad:

$$\int r^3 dr = -\alpha \int dt \rightarrow \frac{r^4}{4} = -\alpha t + \text{cte}.$$

La constante de integración se deduce de la condición: $t = t_0 \rightarrow r = r_0$. Así, la constante es $\text{cte} = r_0^4/4 + \alpha t_0$, y resulta finalmente:

$$r = \left[r_0^4 - 4\alpha(t - t_0) \right]^{1/4},$$

que es la función correspondiente a la curva para la distancia mostrada en la figura 2.

d1) Del recuadro central de la figura 3 del enunciado podemos deducir la frecuencia de la onda gravitacional. En el recuadro hay 4 oscilaciones, luego el tiempo que representa es 4 veces el período:

$$4T = 0,08 \text{ s} \rightarrow T = 0,02 \text{ s} \rightarrow f = 50 \text{ Hz}.$$

Y considerando un error del 4 % como dice el enunciado:

$$f = 50 \pm 2 \text{ Hz}.$$

Si en la gráfica de la figura 4 del enunciado trazamos una recta horizontal en $f = 50 \text{ Hz}$ y una vertical en $t = -0,44 \text{ s}$, vemos que intersectan en $M_c \approx 8,9M_{\text{Sol}}$.

Para obtener el error trazamos bandas para los correspondientes errores y vemos que su intersección abarca aproximadamente desde $M_c = 8M_{\text{Sol}}$ hasta $10M_{\text{Sol}}$. Es decir, el error es aproximadamente $1M_{\text{Sol}}$. Luego,

$$M_c = 9 \pm 1M_{\text{Sol}}.$$

d2) Con $M = m_1 + m_2$, sabiendo que después de la unión la masa del agujero negro resultante es $20,8M_{\text{Sol}}$ y que se ha perdido un 5 % de la masa, tenemos que

$$(m_1 + m_2) - 20,8M_{\text{Sol}} = 0,05(m_1 + m_2),$$

de donde la masa resulta

$$M = (m_1 + m_2) = \frac{20,8M_{\text{Sol}}}{1 - 0,05} = 21,9M_{\text{Sol}}.$$

Con esta ecuación y con la definición de la *chirp mass*:

$$M_c = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}},$$

tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, m_1 y m_2 , de donde podemos obtener la siguiente ecuación de segundo grado:

$$m_1^2 - M m_1 + M_c^{5/3} M^{1/3} = 0,$$

cuya solución es $m_1 = \frac{M \pm \sqrt{M^2 - 4M_c^{5/3} M^{1/3}}}{2}.$

Usando que $M = 21,9M_{\text{Sol}}$ y $M_c = 8,9M_{\text{Sol}}$ (apartado d1), tenemos que las dos soluciones son

$$14,55M_{\text{Sol}} \text{ y } 7,35M_{\text{Sol}}.$$

Una de ellas corresponde a un agujero negro y la otra al otro.

Saber más

Con el LIGO se detectaron por primera vez las ondas gravitacionales después de 100 años de que Einstein las predijera con su teoría de la relatividad general (1915). Los primeros fenómenos registrados son los estudiados en este problema, llamados

evento GW150914 y evento GW151226, ambos producidos por la fusión de dos agujeros negros.

Página web del proyecto LIGO: <https://www.ligo.caltech.edu/>.

Los datos de las curvas mostrados en las figuras están disponibles en las páginas:

<https://www.gw-openscience.org/events/GW150914/>.

<https://www.gw-openscience.org/events/GW151226/>.

Los resultados de los dos eventos GW150914 y GW151226 están publicados en los artículos:

Abbott, B.P. *et al.* (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) (2016). "Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger". *Physical Review Letters* 116(6), pp. 1-16 (DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102).

Abbott, B.P. *et al.* (2016). "GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence". *Physical Review Letters* 116(24), pp. 1-14. (DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.241103).

Para tener una idea de la envergadura del proyecto, la lista de autores de estos trabajos ocupa tres páginas de los artículos.

En 2017 se concedió el Nobel de Física a Rainer Weiss, Barry C. Barish y Kip S. Thorne por este descubrimiento.

Posteriormente, se detectaron por primera vez ondas gravitacionales provenientes de la fusión de dos estrellas de neutrones, fenómenos que también se pudo observar en el espectro electromagnético desde observatorios de diversos lugares de la Tierra.

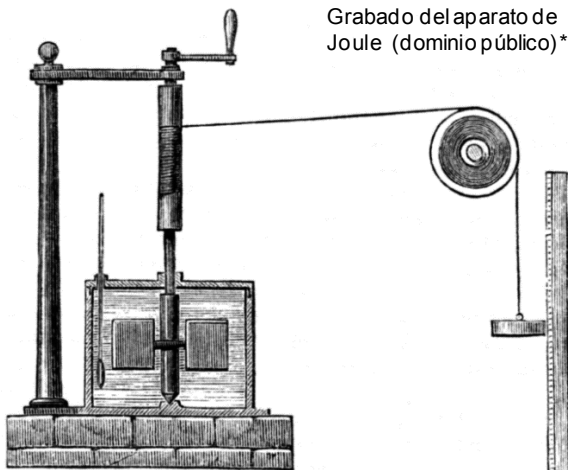
Hay un proyecto en marcha llamado LISA, de la *Agencia Espacial Europea* (ESA), para construir un detector de ondas gravitacionales en el espacio consistente en tres naves espaciales formando un triángulo equilátero de 2.5 millones de km de lado, conectados por un láser. La idea es, análogamente a LIGO, detectar la variación en el patrón de interferencia de los láseres provocados por la perturbación en el espacio-tiempo de una onda gravitacional. ¡Para detectar las ondas gravitacionales esperables es necesario alcanzar una precisión en la medida de la distancia de unos 10^{-11} m! Compárese con la longitud de los brazos del triángulo, ¡de millones de kilómetros! Se espera lanzar la misión en la década de los 2030.

Página web del proyecto LISA: <https://www.elisascience.org/>.

55. Para entrar en calor

Una caloría es la cantidad de calor necesaria para elevar 1 grado centígrado la temperatura de 1 gramo de agua.

En el experimento de Joule se utiliza un recipiente aislado térmicamente que contiene una cierta cantidad de agua. Con un termómetro se mide la temperatura del agua. Dentro del recipiente hay unas paletas que se ponen en movimiento a través de un eje por la acción de una pesa que cae desde una altura h . Si la masa de la pesa es de 1 kg, calcula la altura que debe descender para producir 1 caloría. (Calor específico del agua = 4,187 J/g °C).



Resolución

La energía potencial de la pesa se transforma en energía de rotación de las paletas, y ésta a su vez se transforma en calor que incrementa la temperatura del agua.

Por tanto, igualamos la energía potencial al calor:

$$E_p = Q \rightarrow Mgh = mc_e \Delta T,$$

donde $M = 1$ kg es la masa de la pesa, m es la masa de agua que se calienta, c_e es el calor específico del agua y ΔT el incremento de temperatura.

Para producir una caloría hay que calentar 1 °C una masa de agua de 1 g. Así, pasando todas las unidades al S.I., tenemos:

$$1 \cdot 9,8 \cdot h = 0,001 \cdot 4187 \cdot 1$$

La altura resulta

$$h = 42,7 \text{ cm.}$$

Saber más

* Este grabado del aparato ideado por Joule apareció en 1869 en la revista cultural *Harper's New Monthly Magazine*, una de las más antiguas e importantes de norteamérica: Abbott, J. (1989). "New Theory of Heat". *Harper's New Monthly Magazine* 231, August 1869, pp. 322-328.

56. Dúo ondulatorio

a) La intensidad de la radiación solar recibida en la Tierra vale 1366 W/m^2 . Calcula la potencia radiada por el Sol sabiendo que se encuentra a $150 \times 10^6 \text{ km}$ de la Tierra.

b) Una cuerda vibrante (por ejemplo de violín) emite una nota de frecuencia f_0 . Vamos acortando la cuerda a la mitad, a la 3ª parte, a la 4ª parte... de su longitud. Expresa (justificadamente) la frecuencia f que emite la cuerda, en función de f_0 , cuando la acortamos hasta la n ª parte de su longitud inicial.

Resolución

a) A partir de la intensidad despejamos la potencia, suponiendo ondas esféricas:

$$I = \frac{P}{4\pi d^2} \rightarrow P = 4\pi d^2 I = 4\pi \cdot (150 \cdot 10^9)^2 \cdot 1366 = 3,8 \times 10^{26} \text{ W}.$$

b) Como en las cuerdas vibrantes, con dos extremos fijos, la condición de onda estacionaria es $L = \lambda/2$, la frecuencia de vibración para el modo fundamental es

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda} \rightarrow f(L) = \frac{v}{2L}.$$

Si siempre nos referimos a la misma cuerda (de densidad lineal μ), y suponiendo que no cambiamos su tensión T , la velocidad v de las ondas es constante, pues ésta es $v = \sqrt{T/\mu}$.

Para L_0 la frecuencia es f_0 . Si acortamos la cuerda a una longitud $L = L_0/n$, la nueva frecuencia será

$$f(L) = \frac{v}{2L_0/n} = n \frac{v}{2L_0} = n f_0.$$

Es decir, si acortamos a la mitad, la frecuencia se hace el doble (la siguiente "octava" musical); si acortamos a la tercera parte, la frecuencia se hace el triple; etc.

57. Trío electromagnético

- a) ¿De qué variables depende el campo magnético de un solenoide en su interior?
- b) Sean dos placas separadas una distancia d sometidas a una diferencia de potencial ΔV . Soltamos desde una de las placas una partícula de masa m y carga q , partiendo del reposo. Obtén la velocidad de la partícula cuando llega a la otra placa.
- c) Explica en qué condiciones la fuerza de Lorentz produce un movimiento circular.

Resolución

a) Depende de la intensidad de corriente I que circula por el cable, de su largo L , y del número N de espiras:

$$B = \mu I \frac{N}{L}.$$

N/L es el número de espiras por unidad de longitud. A mayor densidad de espiras y mayor corriente eléctrica, mayor es el campo. También depende de la permeabilidad magnética, μ , del medio que se encuentra en el interior del solenoide.

Una aproximación real a un solenoide es una bobina. En su interior se genera un campo magnético casi uniforme, tanto más cuando más larga sea la bobina. La expresión anterior es válida en el interior, y falla cerca de los extremos.

Si la bobina se cierra formando una circunferencia de radio R , hablamos de un toroide. En este caso la expresión del campo es $B = \mu IN / 2\pi R$.

b) El campo eléctrico en el interior de las placas es $E = \Delta V/d$, y la fuerza eléctrica que actúa sobre una carga es $F = qE = q\Delta V/d$, de forma que el trabajo eléctrico realizado para llevar a la carga de una placa a la otra es $W = Fd = q\Delta V$. Este trabajo es igual a la energía cinética ganada por la partícula y, por tanto, la velocidad resulta

$$q\Delta V = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \frac{2q\Delta V}{m},$$

que no depende de la separación de las placas.

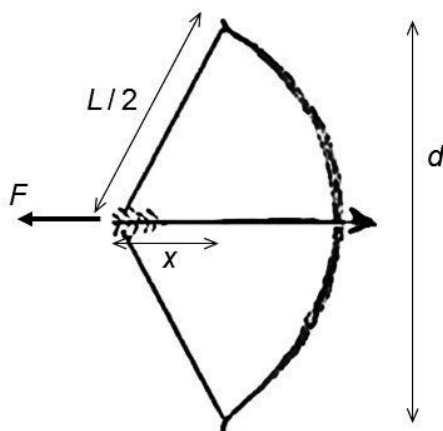
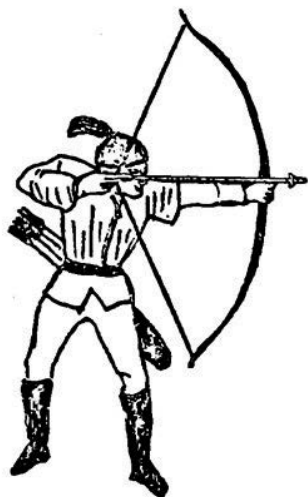
c) La fuerza de Lorentz es $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Para que exista una fuerza no nula, la carga debe estar en movimiento y moverse en el seno de un campo magnético que no sea paralelo a la dirección de la velocidad. Para que la carga describa una circunferencia, el campo magnético debe ser uniforme y perpendicular a la velocidad inicial de la carga. Así, la fuerza produce una aceleración normal y la trayectoria tiene un radio

$$qvB = m \frac{v^2}{R} \rightarrow R = \frac{mv}{qB}.$$

Sin embargo, si la velocidad inicial y el campo no son perpendiculares el movimiento será helicoidal. La velocidad de la carga puede descomponerse en dos componentes: una perpendicular al campo y otra paralela al campo. En la dirección del campo no actúa ninguna fuerza y el movimiento será rectilíneo uniforme. Mientras que en el plano perpendicular al campo se dará un movimiento circular uniforme. La composición de los dos movimientos es una trayectoria helicoidal.

58. Tiro con arco

El tiro con arco es una modalidad olímpica desde el año 1900. En este deporte hay que alcanzar una diana con una flecha propulsada con un arco. Consideremos en primer lugar el modelo llamado *arco medieval*, que consiste en un listón de madera curvado y rígido a cuyos extremos hay enlazada una cuerda elástica. Al cargar la flecha el arquero estira la cuerda de manera que su tensión aumenta (suponemos que el listón de madera prácticamente no se deforma). La tensión, T , de la cuerda es proporcional a la longitud total, L , que tiene la cuerda en un instante dado ($T = kL$). La longitud de la cuerda relajada (sin estirar) es d . Llamamos estiramiento, x , a la separación de la cuerda, medida a lo largo del eje de la flecha, desde su posición relajada (ver figura).



Datos: cuando la cuerda está relajada la tensión es $T_0 = 200$ N; longitud de la cuerda relajada $d = 1$ m; masa de la flecha $m = 20$ g.

a) Obtén el valor de la constante k .

Estudiamos la fuerza que debe ejercer el arquero:

b1) Demuestra que dicha fuerza, en función del estiramiento, es

$$F(x) = 4kx$$

b2) Representa gráficamente $F(x)$ desde la posición relajada hasta $x = d/2$.

c) Calcula la energía acumulada en el arco (o trabajo realizado por el arquero) para un estiramiento $A = 50$ cm.

Llamemos Δt al tiempo transcurrido desde el instante en que el arquero suelta la cuerda con un estiramiento A hasta el momento en que la flecha, de masa m , deja de estar en contacto con la cuerda. Obtén:

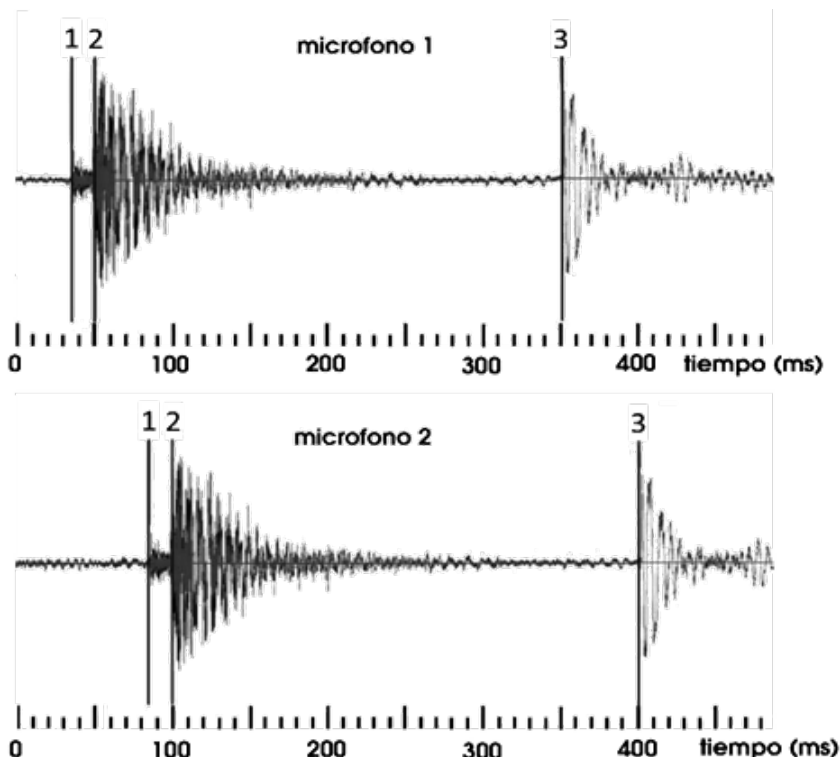
d1) La velocidad con que la flecha es lanzada, en función de T_0 , A , d y m .

d2) El tiempo Δt en función de T_0 , d y m .

d3) El valor numérico de Δt y la velocidad para los datos del problema y $A = 50$ cm.

Un arco olímpico es una variante del arco medieval en que una parte del arco también es flexible, de modo que el arquero debe hacer menos esfuerzo (aunque no es relevante para este problema entender el porqué). En lo sucesivo nos referiremos a este tipo de arco.

e) La velocidad promedio de la flecha se puede determinar experimentalmente mediante el siguiente método. Cada parte del proceso de disparo emite un sonido característico debido a la diferente vibración de los elementos involucrados (arco, flecha, diana, etc.). Para registrar los sonidos producidos por dichas vibraciones, se colocan dos micrófonos a distancias de 3 m y 20 m, respectivamente, por detrás del punto de disparo. Los micrófonos empiezan a grabar a la vez. En las siguientes gráficas se muestran los sonidos registrados por los micrófonos en función del tiempo cuando la diana se coloca a una distancia de 18 m del arco. El punto 1 indica el instante en que el arquero suelta la cuerda, el punto 2 representa el instante en que la flecha abandona la cuerda y el punto 3 el instante en que la flecha impacta con la diana.



Utilizando la información de las gráficas anteriores, determina:

e1) La velocidad del sonido en el aire.

e2) El tiempo de vuelo de la flecha (tiempo que tarda desde que abandona el arco hasta que impacta con la diana). Ayuda: ten en cuenta que los sonidos tardan un tiempo en llegar hasta el micrófono desde que son emitidos.

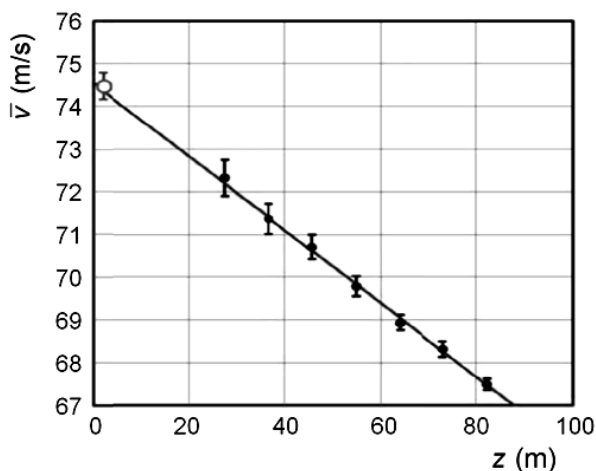
e3) La velocidad media de la flecha durante el tiempo de vuelo. (Suponemos que la flecha sigue una trayectoria horizontal.)

f) En realidad la flecha sufre un rozamiento con el aire que le hace disminuir su velocidad. Este efecto se puede describir de forma aproximada con la siguiente expresión para la velocidad media en función de la distancia z entre el arco y la diana:

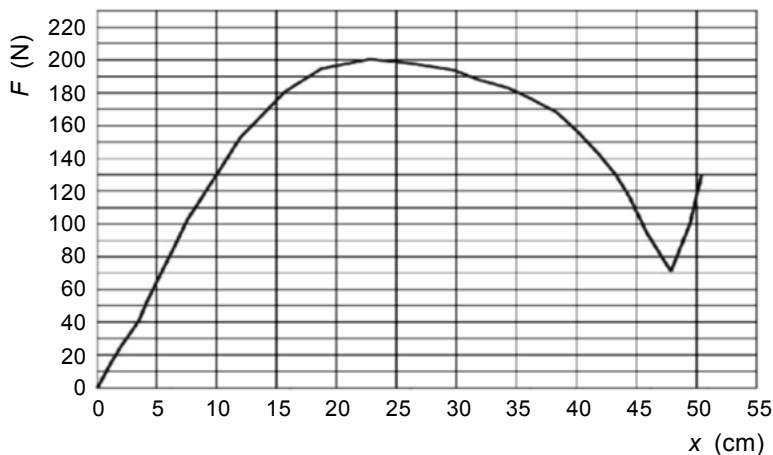
$$\bar{v}(z) = \bar{v}(0) \left(1 - \frac{\sigma z}{2} \right),$$

donde σ es un coeficiente que tiene en cuenta el rozamiento.

La figura de al lado representa el valor de $\bar{v}(z)$ medido con el montaje explicado antes. Determina el valor de σ a partir de la figura.



Como se ha dicho antes, un arco olímpico está diseñado para ayudar al arquero de tal modo que la fuerza, F , que ha de hacer en función del estiramiento, x , no es lineal, sino que viene dada por la curva de abajo.



g1) Estima el trabajo realizado por el arquero si estira la cuerda hasta $x = 50$ cm. Ayuda: calcula numéricamente el área debajo de la curva aproximando el área mediante pequeños rectángulos o fracción.

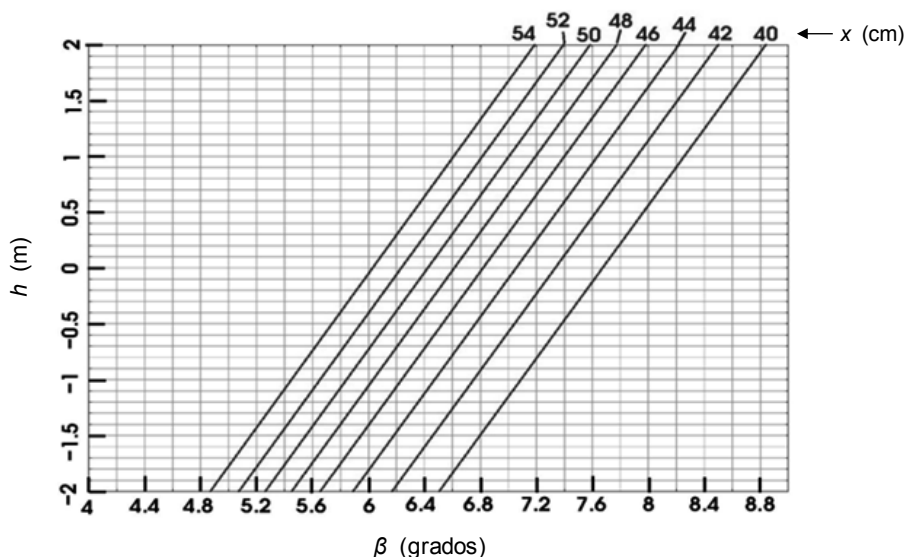
g2) ¿Con qué velocidad debería salir la flecha si todo el trabajo calculado en el apartado anterior se transmitiera a la flecha? Compáralo con el valor que se deduce de la gráfica del apartado f para $\bar{v}(z)$, y razona una posible causa de la discrepancia.

Consideremos que la flecha sale del arco con un ángulo β respecto de la horizontal y que el centro de la diana está a la misma altura que el punto de salida de la flecha.

h1) Determina la distancia vertical h desde el punto de impacto al centro de la diana, en función de la distancia de la diana al arco, z , la velocidad inicial, v_0 , el ángulo β y la aceleración de la gravedad, g . (No considerar el rozamiento con el aire.)

En la figura siguiente se representa el valor de h cuando la diana está a distancia $z = 100$ m del arco, en función del ángulo β y para distintos valores del estiramiento del arco, x , y teniendo en cuenta además el rozamiento del aire.

h2) Si la diana tiene un diámetro de 1 m, y el estiramiento es de 48 cm con un error de ± 2 cm, ¿cuál es el valor del ángulo y su error para que la flecha acierte en la diana?



Resolución

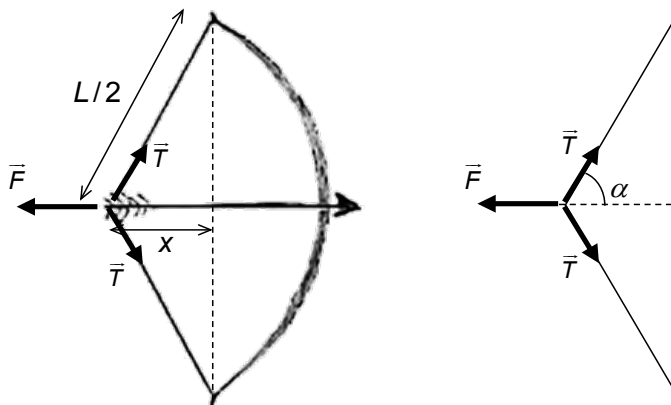
a) El enunciado dice que en el instante inicial la tensión es $T_0 = 200$ N y que la longitud es $L = d = 1$ m. Por tanto, la constante k de la cuerda es

$$k = \frac{T_0}{d} = \frac{200}{1} = 200 \text{ N/m}.$$

b1) En el dibujo se representan las fuerzas que actúan sobre la flecha mientras el arquero sujeta la flecha antes de soltarla.

Vemos que, en la dirección X , la cuerda ejerce sobre la flecha una fuerza que es 2 veces la proyección de la tensión en esa dirección (2 veces porque hay dos fuerzas debidas a la tensión: el tramo superior de cuerda y el inferior):

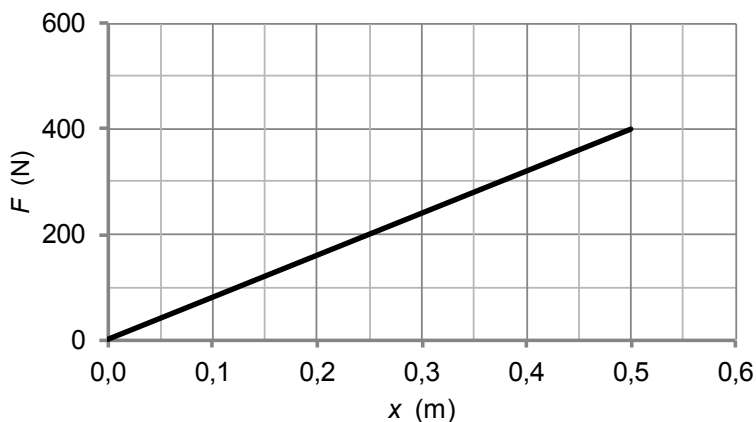
$$F = 2T \cos \alpha = 2kL \cos \alpha = 2kL \frac{x}{L/2} = 4kx.$$



b2) La función $F(x) = 4kx$ es una recta de ordenada en el origen 0 y pendiente

$$4k = 4 \cdot 200 = 800 \text{ N/m}.$$

Su representación gráfica entre 0 y $x = d/2 = 0,5 \text{ m}$ se muestra a continuación.



c) La fuerza sigue la ley de Hooke con constante $k' = 4k$, luego la energía potencial será igual a la de un muelle de constante $4k$:

$$E_p = \frac{1}{2}k'x^2 = \frac{1}{2}4kx^2 = 2kx^2 = 2 \cdot 200 \cdot (0,5)^2 = 100 \text{ J}.$$

d1) La flecha abandona la cuerda en $x = 0$. En ese instante toda la energía potencial se convierte en cinética, por tanto,

$$\frac{1}{2}k'A^2 = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{k'}{m}}A = \sqrt{\frac{4T_0}{md}}A.$$

d2) El movimiento descrito por la flecha mientras está en contacto con la cuerda es un movimiento armónico simple con constante $k' = 4k$. Por tanto, su ecuación del movimiento es

$$x = A \cos \omega t,$$

donde $\omega = \sqrt{k'/m} = \sqrt{4k/m}$ y el período es $T = 2\pi / \omega$.

El tiempo que tarda la flecha desde que se suelta hasta que deja de hacer contacto con la cuerda es $\Delta t = T/4$, es decir, un cuarto de ciclo, pues viaja desde $x = A$ hasta $x = 0$. Por tanto,

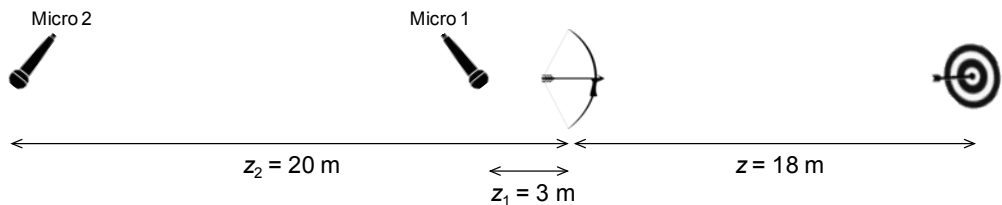
$$\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4\omega} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{4k}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{md}{T_0}}.$$

d3) Valores numéricos:

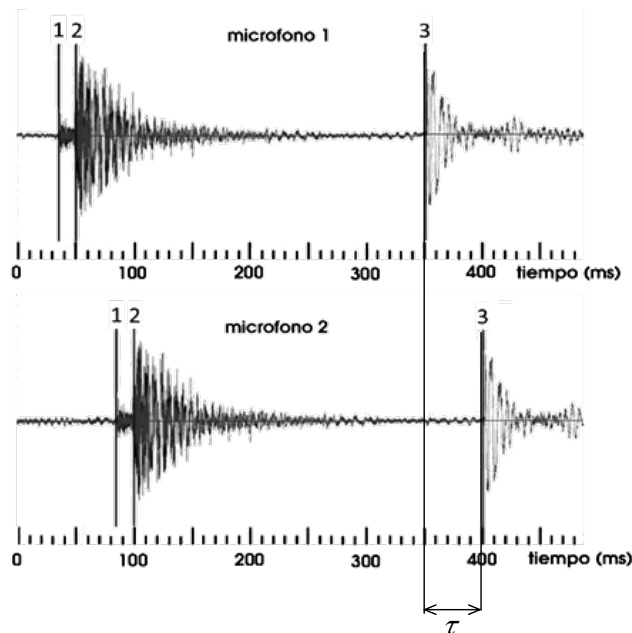
$$\Delta t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{md}{T_0}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{0,02 \cdot 1}{200}} = 0,079 \text{ s} \quad (\text{no depende de } A),$$

$$v = \sqrt{\frac{4T_0}{md}} A = \sqrt{\frac{4 \cdot 200}{0,02 \cdot 1}} \cdot 0,5 = 100 \text{ m/s}.$$

e1) Según el enunciado, los micrófonos se colocan tal y como indica la figura:



El desplazamiento temporal que hay entre la señal recogida por el micrófono 1 y por el micrófono 2 (llamémosle τ), es debido al tiempo extra que tarda el sonido en llegar al micrófono 2 (el más alejado). Podemos fijarnos en el corrimiento entre cualquier punto de la gráfica (puntos 1, 2 o 3). Por ejemplo, si nos fijamos en el punto 3 el desplazamiento temporal es $\tau \approx 50 \text{ ms}$.



El tiempo τ es el que tarda el sonido, a velocidad v_s , en recorrer la distancia que separa el micrófono 1 del micrófono 2. Así,

$$\tau = \frac{z_2 - z_1}{v_s} \rightarrow v_s = \frac{z_2 - z_1}{\tau} = \frac{20 - 3}{0,05} = 340 \text{ m/s}.$$

e2) El tiempo de vuelo real de la flecha, t_{vuelo} , será el tiempo $T = 300 \text{ ms}$, entre los puntos 2 y 3 de cualquiera de los dos micrófonos, menos el tiempo que ha tardado el sonido en ir desde 3 a 2:

$$t_{\text{vuelo}} = T - \frac{z}{v_s} = 0,3 - \frac{18}{340} = 247 \text{ ms}.$$

Una justificación más rigurosa de esta expresión es la siguiente: Llamemos t_2 al instante de salida de la flecha recogido por un micrófono (micrófono 1, por ejemplo); y t_3 al tiempo impacto con la diana recogido por el mismo micrófono, que es el tiempo de vuelo más el tiempo que tarda el sonido en llegar al mismo micrófono. Entonces,

$$t_2 = \frac{z_1}{v_s}, \quad t_3 = t_{\text{vuelo}} + \frac{z + z_1}{v_s}.$$

Si llamamos T a la distancia temporal recogida por los micrófonos entre los eventos 2 y 3, vemos en la gráfica que $T = 300 \text{ ms}$ y

$$T = t_3 - t_2 = t_{\text{vuelo}} + \frac{z}{v_s} \rightarrow t_{\text{vuelo}} = T - \frac{z}{v_s}.$$

e3) Con el tiempo de vuelo real y la distancia recorrida por la flecha, su velocidad es

$$v = \frac{z}{t_{\text{vuelo}}} = \frac{18}{0,247} \approx 73 \text{ m/s}.$$

f) La pendiente de la recta $\bar{v}(z) = \bar{v}(0)(1 - \sigma z/2)$ es $-\bar{v}(0)\sigma/2$. Podemos obtener la pendiente de la gráfica a partir de dos puntos. En concreto, vemos que la recta pasa por los puntos (0 74,5) y (83 67). Por tanto, la pendiente es

$$p = \frac{67 - 74,5}{83 - 0} = -0,09 \text{ s}^{-1}.$$

Y $\bar{v}(0) = -74,5 \text{ m/s}$ es la ordenada en el origen. Por tanto, podemos despejar:

$$\sigma = -\frac{2p}{\bar{v}(0)} = \frac{2 \cdot 0,09}{74,5} = 0,0024 \text{ m}^{-1}.$$

g1) El trabajo realizado por la fuerza $F(x)$ desde $x = 0$ a $x = 50 \text{ cm}$ viene dado por la integral

$$W = \int_0^{0,5} F(x) dx,$$

que representa el área encerrada por $F(x)$ entre 0 y 0,5 m. Podemos calcular el área de forma aproximada viendo que un rectángulo pequeño de la figura del enunciado (donde se muestra el comportamiento no lineal de la fuerza) tiene por lados: 5 cm y 10 N, luego su área es $10 \text{ N} \times 0,05 \text{ m} = 0,5 \text{ J}$. El número de rectángulos pequeños debajo de la curva es, aproximadamente, 145. El área total es, aproximadamente,

$$145 \times 0,5 \text{ J} = 72,5 \text{ J}.$$

g2) Si todo el trabajo se transmitiera a la flecha, ésta adquiriría una energía cinética igual a dicho trabajo:

$$W = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 72,5}{0,02}} = 85 \text{ m/s}.$$

En la gráfica de $\bar{v}(z)$ se ve que la velocidad de salida de la flecha es 74,5 m/s, que es menor que la obtenida ahora. Esto se debe a que no toda la energía se convierte en energía cinética. Una parte se pierde en rozamiento con el aire o en rozamiento interno de las piezas, en vibración de la cuerda, del arco y de la flecha, en sonido, etc. La energía que pasa a energía cinética de la flecha es $(74/85)^2 \approx 0,75$. Es decir, el 25 % de la energía se pierde en otras causas distintas a la velocidad de la flecha.

h1) Este es un ejemplo típico de tiro parabólico. Si llamamos eje Z al horizontal e Y al vertical, entonces las ecuaciones del movimiento en cada eje son

$$\text{eje Z:} \quad z = (v_0 \cos \beta)t,$$

$$\text{eje Y:} \quad y = (v_0 \sin \beta)t - \frac{1}{2}gt^2,$$

pues en el eje horizontal tenemos un movimiento rectilíneo uniforme con velocidad $v_0 \cos \beta$, y en el eje vertical un movimiento uniformemente acelerado con velocidad inicial $v_0 \sin \beta$ y aceleración $-g$. Despejando el tiempo de la primera ecuación y sustituyéndolo en la segunda, vemos que la altura $y = h$ en función de z queda:

$$h = z \tan \beta - \frac{g}{2} \left(\frac{z}{v_0 \cos \beta} \right)^2.$$

h2) Una recta horizontal en $h = 0$ intersecta la recta $x = 48 \text{ cm}$ en $\beta = 6,6^\circ$. Para dar en la diana por arriba, h ha de valer como mucho 0,5 m (la mitad del diámetro de la diana). Una recta horizontal en $h = 0,5 \text{ m}$ corta a la recta $x = 48 \text{ cm}$ en $\beta = 6,9^\circ$. Para impactar por debajo ($h = -0,5 \text{ m}$) el ángulo es aproximadamente $6,3^\circ$. Es decir, para un estiramiento $x = 48 \text{ cm}$ el ángulo para acertar en la diana debe estar en el intervalo $\beta \in [6,3^\circ, 6,9^\circ]$.

Sin embargo, como el error en x es de $\pm 2 \text{ cm}$, el valor del estiramiento puede estar entre 46 cm y 50 cm. Repitiendo el cálculo para esos otros estiramientos tenemos:

$$x = 46 \text{ cm} \rightarrow \beta \in [6,5^\circ, 7,1^\circ],$$

$$x = 50 \text{ cm} \rightarrow \beta \in [6,1^\circ, 6,7^\circ].$$

Por tanto, para estar seguros de atinar en la diana, si $x \in [46, 50] \text{ cm}$, el ángulo β debe estar en la intersección de los rangos anteriores, es decir, entre $6,5^\circ$ y $6,7^\circ$.

Saber más

Si te interesa la práctica deportiva del tiro con arco puedes visitar la página de la Real Federación Española de Tiro con Arco: <https://www.federarco.es/>.

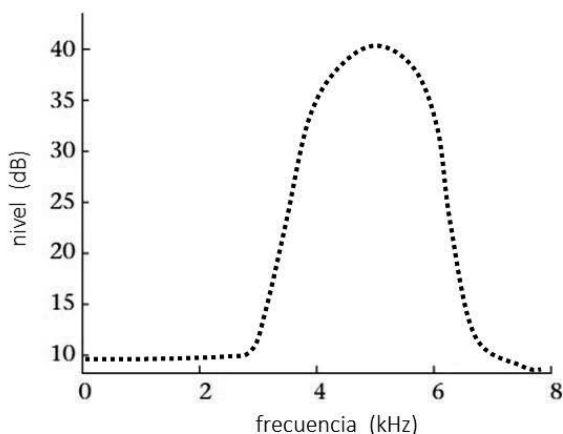
59. El canto de un pajarico

Un pájaro está cantando en el jardín a 10 metros de nosotros. Registramos el sonido mostrado en el espectro de la figura.

a) Obtén el intervalo de longitudes de onda del sonido emitido.

b) Calcula la potencia con que el pájaro emite el tono más fuerte.

Datos: velocidad del sonido = 340 m/s, $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.



Resolución

a) El intervalo de frecuencias emitidas va de 3000 a 7000 Hz, aproximadamente. La longitud de onda se calcula a partir de la frecuencia teniendo en cuenta la velocidad del sonido:

$$\lambda_{\max} = \frac{v}{f} = \frac{340}{3000} = 0,113 \text{ m}, \quad \lambda_{\min} = \frac{340}{7000} = 0,048 \text{ m}.$$

b) El tono más potente es a la frecuencia de 5000 Hz y tiene un nivel de intensidad de 40 dB. Calculamos su intensidad:

$$L = 10 \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) = 40 \rightarrow 10^4 = \frac{I}{10^{-12}} \rightarrow I = 10^{-8} \text{ W/m}^2.$$

Como está registrada a 10 m, la potencia es

$$P = I \cdot 4\pi d^2 = 10^{-8} \cdot 4\pi \cdot 10^2 = 1,25 \times 10^{-5} \text{ W}.$$

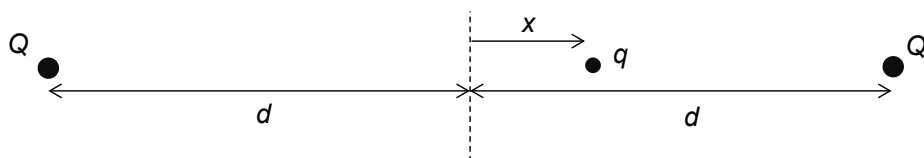
60. Oscilaciones de una carga eléctrica

Disponemos de dos cargas fijas, iguales, positivas y de valor Q , separadas una distancia $2d$. Situamos otra carga, de valor q y masa m , en el punto medio entre las dos anteriores.

- Calcula la fuerza que experimenta la carga q . ¿Depende del signo de q ?
- Obtén la expresión de la energía potencial eléctrica.

Ahora separamos la carga q del centro una distancia x_A , y la soltamos. Dependiendo de si la carga es positiva o negativa, realizará un movimiento armónico simple en torno al centro, o bien tendrá otro comportamiento.

- Discute para qué signo de la carga el movimiento es oscilatorio e indica qué hace la carga si tiene el signo opuesto.



Vamos a estudiar el movimiento oscilatorio de la carga.

- Escribe la ecuación $x(t)$ para el movimiento armónico, en función del período T de oscilación y de la separación máxima x_A .
- Plantea la expresión de la fuerza total sobre la carga cuando se encuentra a distancia x desde el centro (que tomamos como origen), y obtén una aproximación lineal similar a la de la ley de Hooke. Para ello consideramos pequeñas oscilaciones, $\delta = x/d \ll 1$, y utilizamos la aproximación $1/(1 \pm \delta)^2 \approx 1 \mp 2\delta$.
- Obtén el período de oscilación T de la carga.
- Halla la velocidad media de la carga en un recorrido de $-x_A$ a x_A .
- Con la velocidad anterior, obtén la intensidad de corriente media en ese tramo.
- ¿Qué campo magnético es creado por ese movimiento rectilíneo de la carga? (Indica su dirección y de qué magnitudes dependería).
- Si aplicásemos en toda la región donde se mueve la carga un campo magnético uniforme perpendicular a la línea de oscilación, dibuja aproximadamente una posible trayectoria de la carga.

Resolución

a) La fuerza que experimenta la carga q es nula ya que las otras dos cargas ejercen sobre q fuerzas iguales (atractivas o repulsivas dependiendo del signo de q) pero de sentido contrario. El resultado no depende del signo de la carga q .

b) La energía potencial eléctrica de la carga q a distancia d de las otras dos es

$$E_p = K \frac{qQ}{d} + K \frac{qQ}{d} = 2K \frac{qQ}{d}.$$

c) Se producirá un movimiento oscilatorio si $q > 0$, puesto que $Q > 0$ y entonces las fuerzas sobre q son repulsivas, es decir actúan como fuerzas de recuperación de la posición de equilibrio.

Si fuera $q < 0$, la carga se moverá aceleradamente en línea recta hacia el extremo que esté más próximo en el momento de separar la carga de la posición de equilibrio.

d) La ecuación del MAS que realizaría la carga, sabiendo que $x(t = 0) = x_A$, es

$$x(t) = x_A \cos \omega t = x_A \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

e) La fuerza total que actúa sobre la carga desplazada de su posición de equilibrio es

$$F = K \frac{qQ}{(d+x)^2} - K \frac{qQ}{(d-x)^2} = K \frac{qQ}{d^2} \left(\frac{1}{(1+x/d)^2} - \frac{1}{(1-x/d)^2} \right).$$

Si consideramos sólo pequeñas oscilaciones, $x/d \ll 1$, la expresión anterior puede aproximarse resultando

$$F \approx K \frac{qQ}{d^2} \left(\left(1 - 2\frac{x}{d}\right) - \left(1 + 2\frac{x}{d}\right) \right) = -\frac{4KqQ}{d^3} x,$$

que tiene la forma lineal de la ley de Hooke.

f) El período de oscilación se obtiene utilizando la segunda ley de Newton y la solución de tipo MAS para la posición, de forma similar al caso de un muelle:

$$F = ma = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{4KqQ}{d^3} x,$$

$$m \omega^2 = m \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{4KqQ}{d^3} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{md^3}{4KqQ}}.$$

g) Primero obtenemos la velocidad a partir de la posición expresada por el MAS:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{2\pi}{T} x_A \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

Para obtener la velocidad media entre $-x_A$ y x_A tenemos que integrar respecto al tiempo sabiendo que ese recorrido dura un tiempo igual a medio periodo ($T/2$):

$$\langle v \rangle = \frac{1}{T/2} \int_{-T/2}^0 v(t) dt = \frac{-4\pi x_A}{T^2} \int_{-T/2}^0 \sin \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{4\pi x_A}{T^2} \frac{T}{2\pi} \left[\cos \frac{2\pi t}{T} \right]_{-T/2}^0 = \frac{4x_A}{T}.$$

(Para fijar los límites de integración hemos considerado que la posición $x(t) = x_A$ se alcanza en los tiempos $t = 0, T, 2T \dots$, y la posición $x(t) = -x_A$ en $t = T/2, 3T/2 \dots$).

h) La intensidad de corriente en el tramo $-x_A$ y x_A será

$$I = \frac{q}{t} = \frac{q}{T/2} = \frac{2q}{T},$$

ya que la carga que se desplaza es q en un tiempo $T/2$.

Teniendo en cuenta la expresión del período obtenida en f, la intensidad media es

$$I = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{KQq^3}{md^3}}.$$

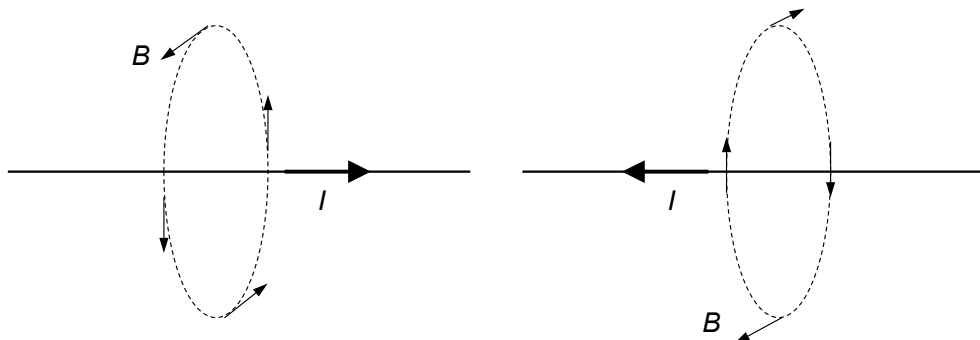
i) En el movimiento oscilatorio de la carga es como si hubiera una corriente rectilínea, I , la cual crea a una distancia r un campo magnético del tipo

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}.$$

Que teniendo en cuenta el resultado para la intensidad, queda de la forma

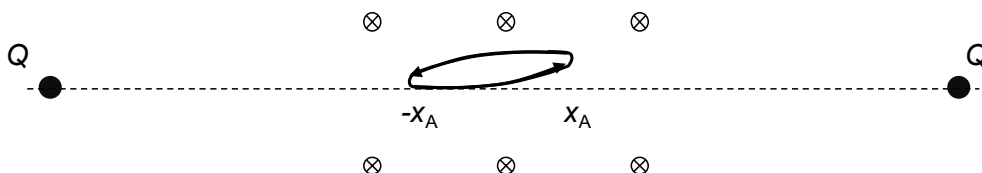
$$B = \frac{\mu_0}{\pi^2} \sqrt{\frac{KQq^3}{md^3}} \frac{1}{r}.$$

Este campo magnético aparece en cada punto de la circunferencia de radio r transversal a la corriente. El sentido del campo se obtiene, por ejemplo, con la regla del sacacorchos. Como el sentido de la corriente oscila, también el sentido del campo magnético oscilará según la carga viaje hacia la derecha o hacia la izquierda.



Por otro lado, este es un campo promedio ya que en realidad la carga va cambiando de velocidad a lo largo del MAS y, por tanto, la intensidad no es constante en cada punto del segmento. En cualquier caso, la expresión obtenida es una aproximación porque la corriente rectilínea no es infinita.

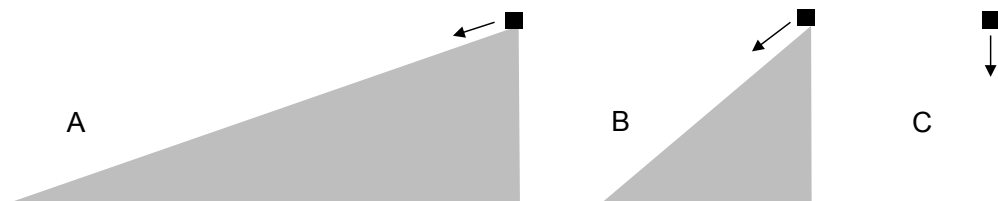
j) Supongamos que la carga parte de $-x_A$ con velocidad hacia la derecha. Debido al campo magnético (hacia el interior del papel) aparece una fuerza de Lorentz hacia arriba que desviará a la carga del eje. Como las oscilaciones son pequeñas (las cargas Q están muy lejos) y suponiendo que el campo magnético es pequeño, las fuerzas electrostáticas seguirán estando aproximadamente en el eje X . De vuelta hacia la izquierda, la fuerza de Lorentz será hacia abajo y la carga volvería hacia el eje. La trayectoria dibujada es sólo aproximada.



61. Vaya caídas

Un cuerpo (lo suponemos puntual) cae sin velocidad inicial desde una cierta altura h en las situaciones mostradas en la figura: por dos planos inclinados (A y B) o en caída libre (C). Despreciamos el rozamiento en los planos inclinados y la fricción con el aire. Responde justificando las respuestas:

- a) ¿En qué caso el cuerpo llega antes al suelo?
- b) ¿En qué caso llega con más velocidad al suelo?
- c) ¿Dependen tus respuestas de la masa que tenga el cuerpo?



Considera ahora en el caso C que el cuerpo se lanza horizontalmente, desde la misma altura h , con velocidad v_0 . Estudia el movimiento del cuerpo hasta que toca el suelo y responde:

- d) Haz un dibujo de la trayectoria.
- e) ¿Cuánto vale el tiempo en llegar al suelo con relación al tiempo que tarda el cuerpo cuando cae vertical sin la velocidad inicial horizontal?
- f) Obtén la distancia horizontal que habrá recorrido cuando llegue al suelo (expresalo en función de las magnitudes que intervienen).

Considera el caso A y supón que justo al final del plano inclinado hay un cuerpo en reposo de masa idéntica al que cae desde la parte superior. El ángulo del plano inclinado es α . Cuando el cuerpo que desciende llega abajo se produce una colisión perfectamente elástica para la componente horizontal de la velocidad.

- g) Halla la expresión de la velocidad con que sale despedido hacia la izquierda el cuerpo que se encontraba abajo, y la velocidad con la que queda el cuerpo que ha descendido.

Para la componente vertical de la velocidad se produce un choque perfectamente inelástico y se transfiere toda la energía al suelo en forma de calor.

- h) Obtén una expresión para dicho calor en función de las variables que intervienen.

Resolución

- a) El cuerpo llega antes al suelo en la caída libre (caso C). En un plano inclinado el cuerpo desciende con menos aceleración y además debe recorrer más distancia.

Matemáticamente: Si h es la altura del plano y α su ángulo, la longitud es $d = \frac{h}{\sin \alpha}$.

El cuerpo desciende por el plano con aceleración $a = g \sin \alpha$. Por tanto, la longitud d será recorrida en un tiempo

$$d = \frac{1}{2} (g \sin \alpha) t^2 = \frac{h}{\sin \alpha} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Vemos que el tiempo es mayor conforme el ángulo del plano es menor. Si $\alpha = 90^\circ$ se obtiene la expresión del tiempo para la caída libre $t = \sqrt{2h/g}$. Si $\alpha = 0^\circ$ el cuerpo no desciende (tiempo infinito).

b) En todos los casos llega con la misma velocidad final:

$$v = at = (g \sin \alpha) t = g \sin \alpha \sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{1}{\sin \alpha} = \sqrt{2gh}.$$

c) Las conclusiones anteriores no dependen de la masa del cuerpo, ya que la aceleración que adquiere no depende de la masa a no ser que existiera fricción.

d) Se trata de una trayectoria semiparabólica.

e) El movimiento en el eje Y es independiente del movimiento en el eje X, así que el tiempo de la caída es el mismo en los dos casos:

$$t = \sqrt{2h/g}.$$

f) En el eje X tenemos un movimiento uniforme a velocidad v_0 . La distancia, d , recorrida en horizontal será

$$d = v_0 t = v_0 \sqrt{2h/g}.$$

g) El cuerpo que cae por el plano llega al final del mismo con velocidad $v = \sqrt{2gh}$. La componente horizontal de su velocidad es

$$v_x = v \cos \alpha = \sqrt{2gh} \cos \alpha.$$

Es velocidad es la que lleva justo antes de la colisión con el segundo cuerpo. Como el choque es elástico, la velocidad del segundo cuerpo tras el choque es $\sqrt{2gh} \cos \alpha$ y el primer cuerpo queda en reposo (pues sus masas son idénticas).

h) La componente vertical de la velocidad del cuerpo que ha caído por el plano es

$$v_y = \sqrt{2gh} \sin \alpha.$$

Y entonces su energía cinética en el eje Y es

$$E_c = \frac{1}{2} m (\sqrt{2gh} \sin \alpha)^2 = mgh \sin^2 \alpha.$$

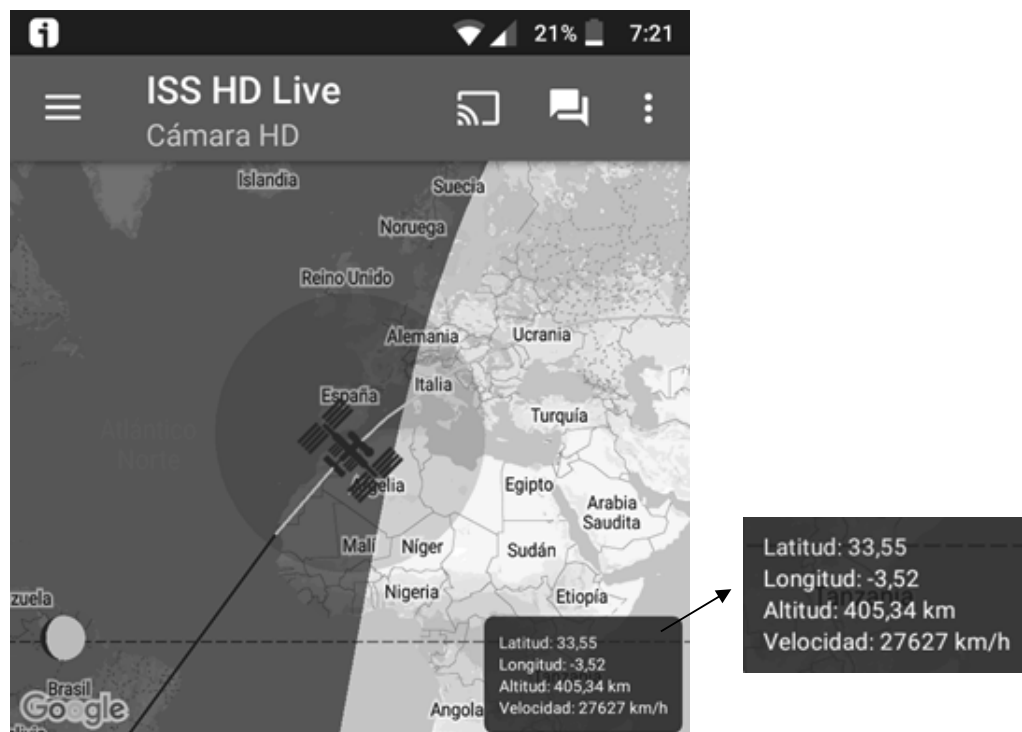
Como el choque con el suelo es perfectamente inelástico y toda la energía cinética se transfiere al suelo en forma de calor, dicho calor será

$$Q = mgh \sin^2 \alpha.$$

En el caso de la caída libre ($\alpha = 90^\circ$), toda la energía potencial del cuerpo se transforma en calor.

62. La Estación Espacial Internacional

Esta imagen es una captura de pantalla de la ventana de una *app* gratuita de Android para teléfonos móviles que muestra la trayectoria en tiempo real de la Estación Espacial Internacional (ISS).



Entre otros datos, verás que la aplicación proporciona la altitud de la Estación y su velocidad lineal instantánea.

a) Calcula el período de la órbita alrededor de la Tierra (expresado en minutos), considerando que la órbita es circular.

b) A partir del período anterior, calcula la velocidad media de la Estación y compara con el valor que da la aplicación. ¿Por qué crees que no son exactamente iguales?

Datos: $G = 6,67 \times 10^{-11}$ SI, masa Tierra = $5,97 \times 10^{24}$ kg, radio Tierra = 6371 km.

c) Observa cómo se curva la trayectoria desde España hacia Ucrania (en la imagen de la derecha se muestran otras trayectorias posteriores). ¿Cómo explicas que las trayectorias de la Estación mostradas sobre el mapa no sean rectilíneas? ¿Podemos ver a la estación cada vez que da una vuelta?



Resolución

a) En la figura podemos leer la altitud a la que está la Estación Espacial en ese momento y también su velocidad: $h = 405,34$ km y $v = 27627$ km/h.

El período orbital lo obtenemos aplicando la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi}{GM_T} (R_T + h)^3.$$

Con los datos que da el enunciado para la masa y el radio terrestres:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(6371 + 405,34)^3 \cdot 10^9}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}} = 5554,2 \text{ s} = 92,6 \text{ min}.$$

b) La velocidad en la órbita se calcula a partir del período:

$$v = \frac{2\pi(R_T + h)}{T} = \frac{2\pi(6371 + 405,34) \cdot 10^3}{5554,2} = 7665,7 \text{ m/s} = 27596,6 \text{ km/h}.$$

El resultado difiere en 30 km/h respecto al valor que indica el *tracker* de la Estación Espacial. La velocidad que hemos calculado es una velocidad media, mientras que la mostrada por la aplicación es una velocidad instantánea, porque la órbita no es perfectamente circular (de hecho, la altitud en el apogeo es de 406 km y de 402 en el perigeo). Además, hemos calculado dicha velocidad media con la altitud en ese instante y no con la altitud media.

b) Para explicar la forma curvada de las trayectorias sobre el mapa hay que tener en cuenta dos cosas:

- 1) la órbita no está en el plano ecuatorial, sino que está inclinada 51° ,
- 2) las trayectorias son la proyección sobre el plano del movimiento en tres dimensiones.

En cada vuelta, la trayectoria se desplaza un poco de manera que no podemos ver a la Estación Espacial en cada vuelta sino sólo cuando pasa cerca de nuestra posición.

Saber más

Como la Estación Espacial Internacional da una vuelta a la Tierra aproximadamente cada hora y media, en la Estación hay una puesta de Sol y un amanecer cada 45 minutos.

Canal *youtube* de la NASA: <https://www.youtube.com/user/NASATElevision>.

Streaming de la NASA: https://www.nasa.gov/multimedia/nasatv/iss_ustream.html.

Página de seguimiento de la ISS: <http://www.isstracker.com/>.

63. La luz de las estrellas

Analizando la luz proveniente de una estrella se puede obtener mucha información valiosa sobre ella, como los elementos químicos que la componen o la velocidad de la estrella respecto a nosotros. Las estrellas emiten luz en un amplio rango del espectro, pero ciertas frecuencias son absorbidas por los átomos de los gases de las capas más externas de las estrellas. Esas frecuencias de absorción (*líneas espectrales*) son debidas a saltos entre niveles energéticos de los electrones de los átomos cuando estos absorben los fotones, y son características de los elementos que componen la estrella, lo que permite obtener su composición comparando con los espectros atómicos conocidos.

En un átomo de hidrógeno los electrones están ligados con una *energía de ligadura* (o energía de ionización; que es la energía necesaria para arrancar el electrón del átomo) que sólo puede tomar valores discretos ("cuantizados") y que viene dada por

$$E_n = \frac{13,6}{n^2} \text{ eV} , \quad (1)$$

donde n es un número natural ($n = 1, 2, 3, \dots$). Por otro lado, un fotón de frecuencia f posee energía $E = hf$, donde h es la constante de Planck. Sabemos que un electrón del átomo sólo puede cambiar del nivel n de energía a otro nivel $n + 1$ si absorbe un fotón cuya energía sea igual a la diferencia de energía entre los dos niveles.

a) Determina la longitud de onda (en nm) de las líneas espectrales debidas a todas las posibles transiciones entre los tres primeros niveles ($n = 1, 2, 3$) del átomo de hidrógeno. Datos: $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$, $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$.

Una de la formas de obtener la velocidad relativa, v_{rel} , entre una estrella y nosotros, en la dirección de la línea visual, es midiendo la modificación por efecto Doppler que sufre la longitud de onda de la luz proveniente de la estrella. La luz que detectamos en la Tierra está más desplazada hacia el rojo si la estrella se aleja de nosotros, y más hacia el azul si se acerca. En el caso de la luz, la expresión de la frecuencia observada, f , en función de la frecuencia emitida por la estrella, f_0 , es

$$\frac{f_0}{f} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} , \quad (2)$$

donde $\beta = v_{\text{rel}} / c$, siendo c la velocidad de la luz.

(Esta fórmula del efecto Doppler es distinta a la de ondas mecánicas, porque aquí la luz no tiene una velocidad de propagación fija respecto del medio).

b) Demuestra que para velocidades muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz, $\beta \ll 1$, se obtiene

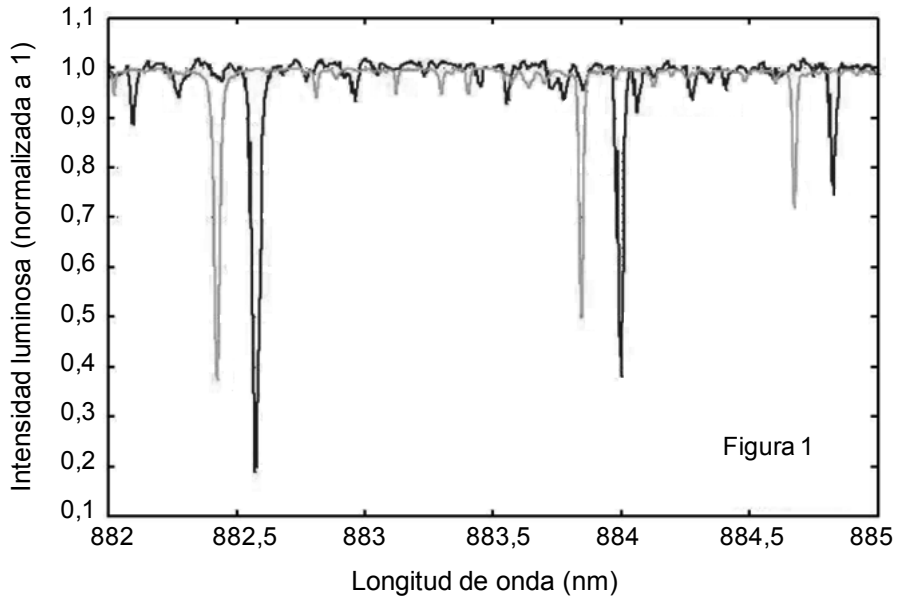
$$v_{\text{rel}} \approx \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} c , \quad (3)$$

donde $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ es la diferencia entre la longitud de onda detectada, λ , y la original emitida por la estrella, λ_0 .

(Ayuda: para valores pequeños de x es válida la aproximación: $\frac{1}{1-x} \approx 1+x$).

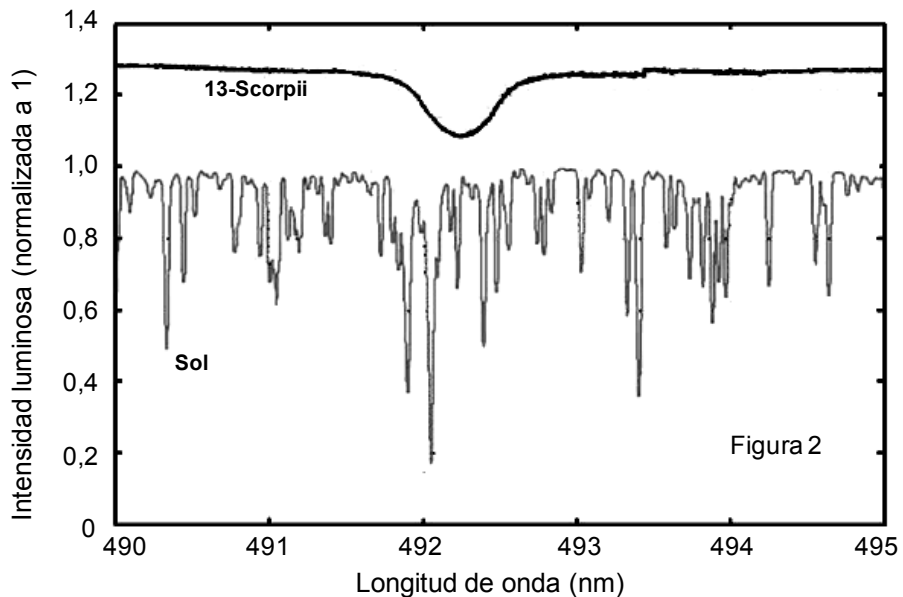
La figura 1 muestra una pequeña parte del espectro de una estrella (curva oscura) cuya composición química es similar a la del Sol (curva clara).

c) Determina la velocidad, v_{rel} , de esa estrella. ¿Se acerca o se aleja de nosotros?



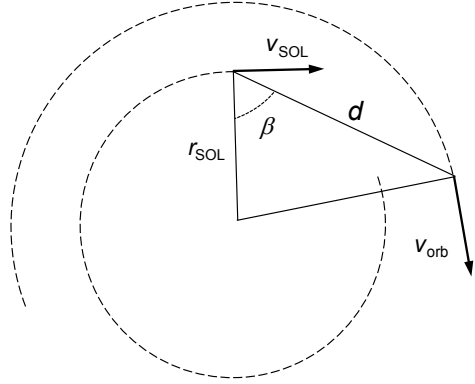
La figura 2 muestra una línea espectral de una zona del espectro de la estrella llamada 13-Scorpii. Esta estrella gira en torno a sí misma con una velocidad de rotación elevada, lo que provoca que la línea espectral ya no corresponda a una longitud de onda única, sino que aparece ensanchada (curva superior en la figura).

d) ¿Podrías razonar por qué ocurre esto?



e) Suponiendo que el eje de rotación de esta estrella sea perpendicular a la recta que une la estrella con la Tierra, estima el periodo de rotación de la estrella sabiendo que tiene un radio de $5,7R_{\text{Sol}}$. (Ten en cuenta la ecuación 3 y la información que necesites de la figura 2). Dato: $R_{\text{Sol}} = 6,96 \times 10^5 \text{ km}$.

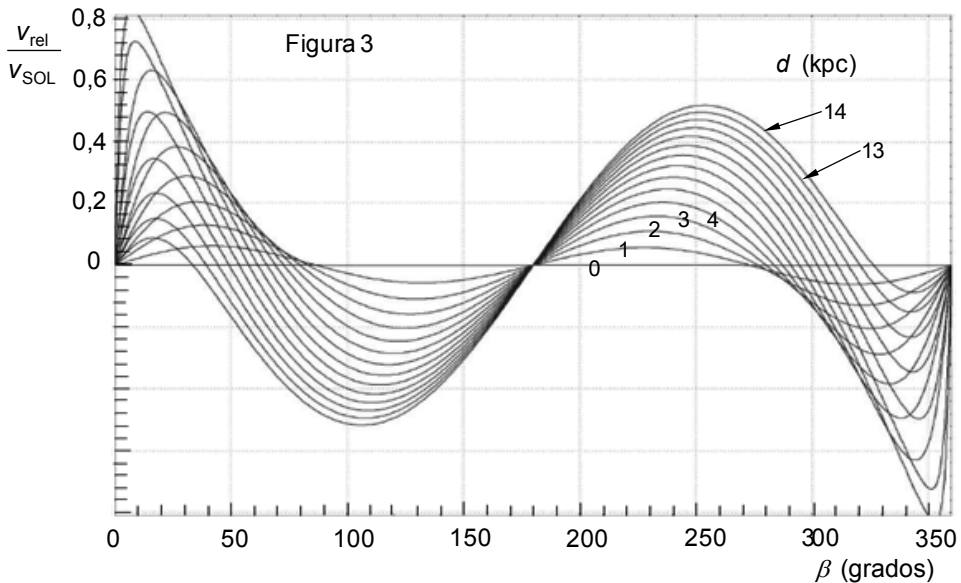
Veamos una posible manera de determinar distancias a estrellas de la Vía Láctea a partir de la velocidad relativa medida por efecto Doppler. El esquema de la derecha muestra al Sol rotando a distancia r_{Sol} respecto al centro galáctico con velocidad orbital v_{Sol} , y a una estrella rotando también alrededor del centro de la galaxia con velocidad v_{orb} . Sabemos que esta velocidad orbital es aproximadamente constante para buena parte de las estrellas de nuestra galaxia: $v_{\text{orb}} \approx v_{\text{Sol}} = 220 \text{ km/s}$.



Por trigonometría, se puede obtener que

$$\frac{v_{\text{rel}}}{v_{\text{Sol}}} \approx \left(\frac{r_{\text{Sol}}}{\sqrt{r_{\text{Sol}}^2 + d^2 - 2r_{\text{Sol}}d \cos \beta}} - 1 \right) \cdot \sin \beta. \quad (4)$$

En la figura 3 se ha representado la expresión anterior en función de β para distintos valores de la distancia, d , a la estrella (con d desde 0 a 14 kpc en intervalos de 1 kpc), y tomando la distancia del Sol al centro galáctico $r_{\text{Sol}} = 8 \text{ kpc}$.



Consideramos la estrella cuya velocidad relativa respecto a nosotros, v_{rel} , fue calculada en el apartado c. (La velocidad de la Tierra respecto del Sol es despreciable). Para dicha estrella hemos determinado experimentalmente que $\beta = 240^\circ$ con error despreciable y que el error del cociente $v_{\text{rel}}/v_{\text{Sol}}$ es $\pm 0,04$.

f) Obtén gráficamente, a partir de la figura 3, la distancia d a la estrella (en kpc) con una estimación de su error. (El símbolo kpc significa kilo-parsec. Es una unidad de distancia en astronomía que equivale a 3262 años luz.)

g) Para otras estrellas, ¿para qué ángulos β de observación no podremos determinar la distancia por este método?

Resolución

a) Las transiciones posibles son: del nivel 1 al 2, del 1 al 3 y del 2 al 3. Calculamos las energías necesarias para cada transición:

$$\Delta E_{1 \rightarrow 2} = E_1 - E_2 = \frac{13,6}{1^2} - \frac{13,6}{2^2} = 10,2 \text{ eV} ,$$

$$\Delta E_{1 \rightarrow 3} = \frac{13,6}{1^2} - \frac{13,6}{3^2} = 12,1 \text{ eV} , \quad \Delta E_{2 \rightarrow 3} = \frac{13,6}{2^2} - \frac{13,6}{3^2} = 1,9 \text{ eV} .$$

Como $\Delta E = hf = h \frac{c}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{hc}{\Delta E}$, podemos calcular las longitudes de onda de la radiación necesaria para producir esas transiciones:

$$\lambda_{1 \rightarrow 2} = 121,5 \text{ nm} , \quad \lambda_{1 \rightarrow 3} = 102,5 \text{ nm} \quad \text{y} \quad \lambda_{2 \rightarrow 3} = 652 \text{ nm} .$$

b) Si $\beta \ll 1$ podemos hacer la aproximación

$$\left(\frac{f_0}{f} \right)^2 = \frac{1+\beta}{1-\beta} \approx (1+\beta) \cdot (1+\beta) \rightarrow \frac{f_0}{f} \approx 1+\beta .$$

$$\text{Pero } \frac{f_0}{f} = \frac{\lambda}{\lambda_0} \rightarrow \frac{\lambda}{\lambda_0} = 1+\beta \rightarrow \beta = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 = \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} .$$

$$\text{Y se demuestra la expresión pedida: } \beta = \frac{v_{\text{rel}}}{c} \rightarrow \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \frac{v_{\text{rel}}}{c} \rightarrow v_{\text{rel}} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} c .$$

c) En la figura podemos medir la diferencia de las longitudes de onda detectadas, que es aproximadamente $\Delta \lambda = 0,17 \text{ nm}$. Así, la velocidad relativa resulta

$$v_{\text{rel}} = \frac{0,17}{884} c = 1,9 \times 10^{-4} c = 57,7 \text{ km/s} .$$

La longitud de onda se ha desplazado hacia valores mayores, por tanto, la estrella se aleja de nosotros.

d) Como la estrella gira sobre sí misma, desde nuestra posición vemos uno de sus lados moviéndose hacia nosotros, mientras que el lado contrario se aleja de nosotros. Por eso, la luz emitida por un lado se desplaza hacia el azul y la luz del otro lado se desplaza hacia el rojo. Esto produce un ensanchamiento de la luz que nos llega, que ya no es una longitud de onda pura.

e) En la figura podemos observar que la longitud de onda que emite la estrella y la anchura de la línea son aproximadamente

$$\Delta\lambda = 0,6 \text{ nm} \quad \text{y} \quad \lambda_0 = 492 \text{ nm}.$$

Esta anchura corresponde a una velocidad relativa

$$v_{\text{rel}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} c = \frac{0,6}{492} c = 365,85 \text{ km/s}.$$

Pero esa velocidad relativa debe ser el doble de la velocidad lineal de rotación de la estrella sobre sí misma:

$$v_{\text{rel}} = 2v = 2 \cdot \frac{2\pi R}{T},$$

donde el periodo de rotación es T y el radio es $R = 5,7R_{\text{Sol}}$. Así,

$$T = \frac{4\pi R}{v_{\text{rel}}} = \frac{4\pi \cdot 5,7 \cdot 6,96 \cdot 10^5}{365,85} = 136267 \text{ s} \approx 38 \text{ h}.$$

f) La distancia pedida, d , entre la estrella y nosotros es lógicamente la distancia entre la estrella y el Sol, pues nosotros estamos en el Sistema Solar en una escala mucho menor que la de distancias entre estrellas.

Según la velocidad relativa obtenida en el apartado c, $v_{\text{rel}} = 57,7 \text{ km/s}$, y la velocidad orbital del Sol en la galaxia, $v_{\text{SOL}} = 220 \text{ km/s}$, el cociente es

$$\frac{v_{\text{rel}}}{v_{\text{SOL}}} = \frac{57,7}{220} = 0,26.$$

El enunciado dice que detectamos el cociente con un error de $\pm 0,04$. Entonces leemos en la gráfica valores en el eje Y desde 0,22 a 0,30, para el corte con el eje X en $\beta = 240^\circ$. Así, obtenemos

$$d \approx 5 \pm 1 \text{ kpc}.$$

g) Para $\beta < 90^\circ$ y $\beta > 270^\circ$ vemos que hay parejas de curvas que se cruzan, lo que significa que encontraríamos dos posibles soluciones. Descartamos estas regiones. Por otro lado, para $\beta = 180^\circ$ la velocidad relativa es 0 y tampoco nos sirve ese punto. En definitiva, el método puede utilizarse en el intervalo de ángulos $\beta \in [90^\circ, 270^\circ]$ exceptuando $\beta = 180^\circ$.

64. Popurri

Calcula todo lo siguiente:

- a) El periodo de un péndulo de 5 m de largo.
- b) La corriente en un circuito con una resistencia de 50Ω alimentado con una pila de 9 V.
- c) El empuje del agua sobre una roca sumergida de 1 m^3 .
- d) La energía necesaria para calentar 1 L de agua de 20 a 50°C .
- e) La energía potencial de un coche de 800 kg en un puerto a 1000 m de altura.
- f) La constante de un muelle que se estira 10 cm cuando le colgamos una masa de 500 g.
- g) La velocidad de propagación de la onda $\cos(9t - 3x)$, con las unidades en el SI.
- h) La fuerza de Lorentz sobre una carga de 0,03 C que se mueve a 100 m/s perpendicularmente a un campo de 0,05 T.
- i) El período orbital (en horas) de la Estación Espacial Internacional, que está a 408 km de altura sobre la Tierra.
- j) Los decibelios de un sonido de 0,02 W a 5 m de distancia.

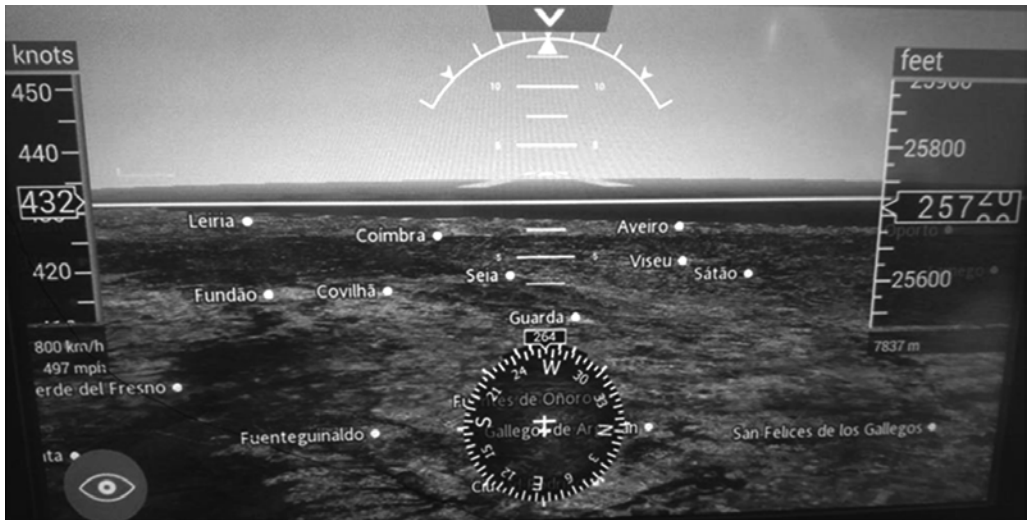
Datos: densidad del agua = 1000 kg/m^3 ; calor específico del agua = $4187 \text{ J/kg } ^\circ\text{C}$, $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, masa de la Tierra $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$, radio de la Tierra $R_T = 6371 \text{ km}$, $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.

Resolución

- a) Periodo del péndulo: $T = 2\pi\sqrt{L/g} = 4,5 \text{ s}$.
- b) Corriente: $I = V/R = 9/50 = 0,18 \text{ A}$.
- c) Empuje del agua: $E = P_{\text{agua}} = m_{\text{agua}} g = \rho_{\text{agua}} V g = 10^3 \cdot 1 \cdot 9,8 = 9800 \text{ N}$.
- d) Energía: $E = Q = mc_e \Delta T = \rho V c_e \Delta T = 10^3 \cdot 0,1^3 \cdot 4187 \cdot (50 - 20) = 125610 \text{ J}$.
- e) Energía potencial: $E_p = mgh = 800 \cdot 9,8 \cdot 1000 = 7,84 \times 10^6 \text{ J}$.
- f) Constante de un muelle: $F = mg = k\Delta L \rightarrow k = 0,5 \cdot 9,8 / 0,1 = 49 \text{ N/m}$.
- g) Velocidad de la onda: $\omega = 9 \text{ s}^{-1}$, $k = 3 \text{ m}^{-1} \rightarrow v = \omega/k = 9/3 = 3 \text{ m/s}$.
- h) Fuerza de Lorentz: $F = qvB = 0,03 \cdot 100 \cdot 0,05 = 0,15 \text{ N}$.
- i) Período orbital: $T = 2\pi\sqrt{(R_T + h)^3 / GM_T} = 1,5 \text{ h}$.
- j) Decibelios: $L = 10\log(I/I_0) = 10\log((0,02/4\pi \cdot 5^2)/10^{-12}) = 78 \text{ dB}$.

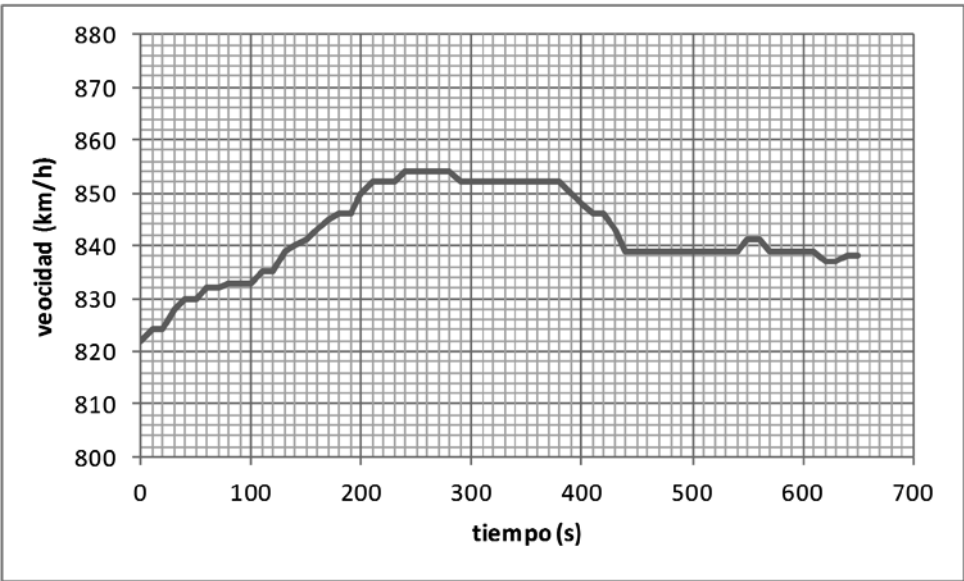
65. Navegación a bordo de mi vuelo

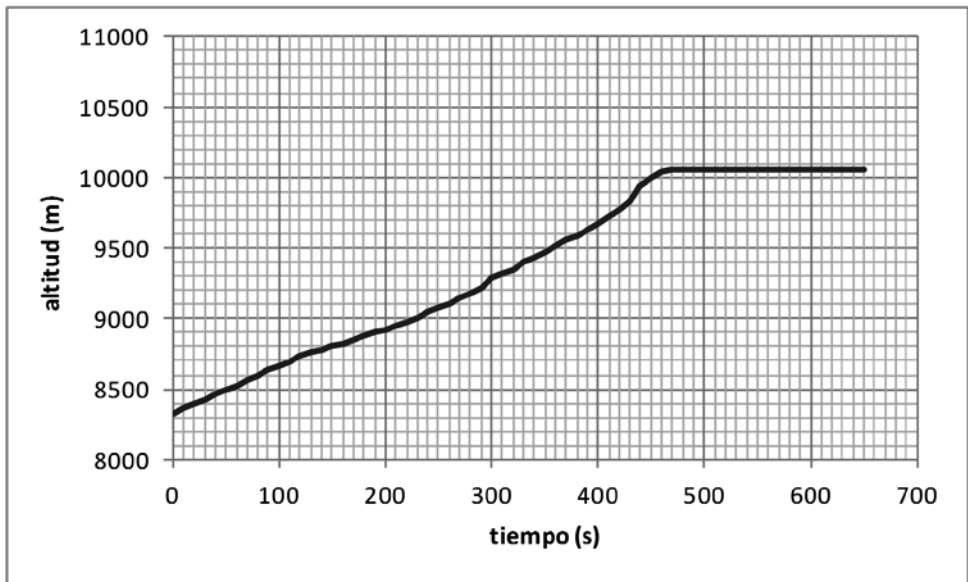
En un vuelo transatlántico de España a Sudamérica se tomó la siguiente fotografía de la pantalla de entretenimiento con la información del vuelo. En ese momento el avión estaba llegando a Portugal y había recorrido unos 250 km desde el despegue.



- a) Obtén de los datos de la pantalla cuánto valen los factores de conversión entre:
- metros y pies (*feet*),
 - millas y km,
 - km/h y nudos (*knots*).

El pasajero fue anotando cada 10 s la velocidad y la altitud que indicaba el monitor de vuelo, y representó los valores en las dos gráficas siguientes. Los tiempos en el eje X están contados a partir del instante en que el pasajero empezó el registro de datos.





- b)** ¿Cuál es la altitud de crucero y la velocidad de crucero del avión? ¿Qué justificación das al comportamiento de la velocidad en los instantes 550 s y 620 s?
- c)** ¿Cuál es la aceleración media del avión durante los 3,5 primeros minutos del registro de datos?
- d)** Realiza una representación gráfica aproximada de la aceleración en función del tiempo, durante el intervalo registrado. (Ayuda: divide la gráfica en cuatro tramos de aceleración aproximadamente constante.)
- e)** Estima la distancia recorrida por el avión mientras el pasajero estuvo registrando datos.
- f)** Obtén la componente vertical, v_y , de la velocidad.
- g)** ¿Cuánto tiempo pasó desde que el pasajero tomó la foto hasta que empezó a registrar datos?
- h)** ¿Es posible que tanto la ascensión como el desplazamiento horizontal se hayan realizado siempre al mismo ritmo desde que el avión despegó? Haz los cálculos que necesites para justificar la respuesta.
- i)** Representa aproximadamente la forma de la trayectoria del avión, desde unos pocos kilómetros después del despegue, en su ascenso hasta la altitud de crucero.

Resolución

a) En la foto de la pantalla leemos 432 nudos, 800 km/h y 497 mph (mph es millas por hora) para la velocidad del avión; y 25710 pies y 7837 m para la altura. Entonces,

$$\frac{25710}{7837} \frac{\text{pies}}{\text{m}} = 3,28, \quad \frac{800}{432} \frac{\text{km/h}}{\text{nudos}} = 1,85, \quad \frac{800}{497} \frac{\text{km/h}}{\text{mph}} = 1,61.$$

Por tanto, las conversiones son:

1 m = 3,28 pies; 1 nudo = 1,85 km/h; 1 mph = 1,61 km/h.

b) Con la información del problema y de las gráficas se entiende que el avión, tras su despegue en Madrid, ha alcanzado su altitud máxima en Portugal y que mantendrá aproximadamente esa altitud de crucero mientras cruza el océano Atlántico. Es decir, el valor de altitud constante a partir de los 450 s en la gráfica indica precisamente la altitud de crucero, que es de unos 10 050 m (unos 33 000 pies). La velocidad de crucero del avión es de unos 839 km/h (522 mph).

Las pequeñas fluctuaciones (de unos 2 km/h) que se aprecian en torno al valor de crucero podrían ser debidas a las perturbaciones atmosféricas o turbulencias, que impiden que la velocidad sea 100 % uniforme.

c) La variación de la velocidad en los 3,5 primeros minutos es aproximadamente lineal, es decir, el movimiento es uniformemente acelerado. El avión pasa de 822 km/h a 852 km/h en 210 s. Por tanto, la aceleración es

$$a = \frac{852 - 822}{210} \frac{\text{km/h}}{\text{s}} = 0,04 \text{ m/s}^2 = 514 \text{ km/h}^2.$$

d) Los cuatro tramos de aceleración aproximadamente constante son:

i) Entre 0 y 210 s, aumento de velocidad de 822 a 852 km/h,

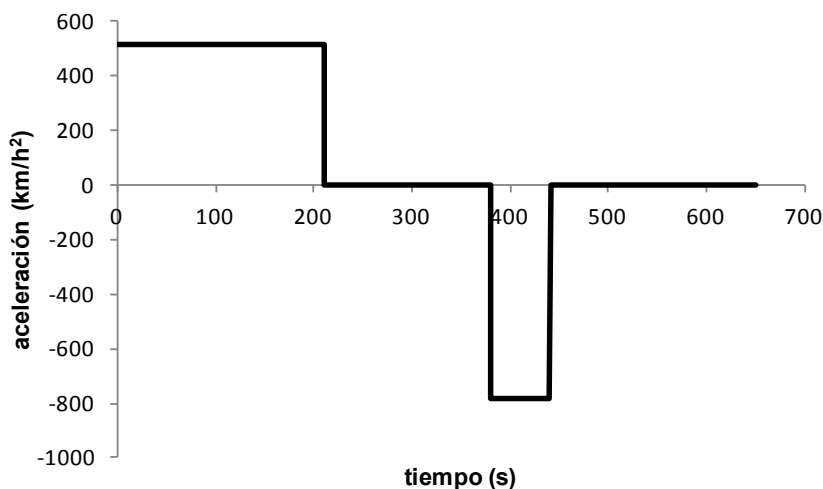
$$a = 514 \text{ km/h}^2.$$

ii) Entre 210 y 380 s, velocidad constante de 852 km/h $\rightarrow a = 0$.

iii) Entre 380 y 440 s, disminución de velocidad de 852 a 839 km/h,

$$a = -780 \text{ km/h}^2.$$

iv) Entre 440 y 650 s, velocidad constante de 839 km/h $\rightarrow a = 0$.



e) Consideramos los cuatro tramos de aceleración constante del apartado anterior, y calculamos cada una de las distancias recorridas en cada tramo con la expresión $d = v_0 t + a t^2 / 2$:

$$d_1 = 822 \cdot \Delta t_1 + \frac{1}{2} \cdot 514 \cdot \Delta t_1^2 = 48,8 \text{ km},$$

$$d_2 = 852 \cdot \Delta t_2 = 40,2 \text{ km},$$

$$d_3 = 852 \cdot \Delta t_3 + \frac{1}{2} \cdot (-780) \cdot \Delta t_3^2 = 14,1 \text{ km},$$

$$d_4 = 839 \cdot \Delta t_4 = 48,9 \text{ km}.$$

La distancia total es la suma de las cuatro anteriores: $d = 152 \text{ km}$.

También podemos resolver el problema sabiendo que la distancia recorrida entre los tiempos 0 y T es al área bajo la curva de la velocidad en función del tiempo:

$$d = \int_0^T v(t) dt.$$

Podemos resolver esa integral de forma aproximada como la suma discreta de todos los cuadraditos de la gráfica bajo la curva de la velocidad. El número total de cuadraditos es 27359. De acuerdo a la escala de la gráfica, el área de cada cuadradito es $10 \text{ s} \times 2 \text{ km/h} = (20 / 3600) \text{ km}$. Por tanto, la distancia total recorrida es

$$27359 \cdot 20 / 3600 = 152 \text{ km}.$$

En los apartados anteriores estamos considerando que $v_x \approx v$, pues $v_y \ll v_x$.

f) Los velocidad en el eje Y se puede obtener de la gráfica de la altitud en función del tiempo. En primera aproximación, podemos suponer un crecimiento lineal de la altura (velocidad vertical constante) hasta los 430 s. El avión ha ascendido desde los 8320 hasta los 9800 m en ese intervalo de tiempo. Por tanto, la velocidad vertical es, aproximadamente,

$$v_y = 3,44 \text{ m/s}.$$

A partir de los 460 s, la velocidad de ascensión es nula porque la altitud se mantiene constante (altitud de crucero de unos 10 050 m).

g) En el momento de la foto la altitud es 7837 m, pero los datos empiezan con una altitud de 8320 m. Como la velocidad de ascenso era de 3,44 m/s, el tiempo transcurrido desde la foto al registro del primer dato es

$$8320 - 7837 = 3,44 \cdot \Delta t \rightarrow \Delta t = 140 \text{ s} \approx 2,3 \text{ min}.$$

A la misma conclusión llegamos si comparamos los valores de velocidad: 800 km/h en la foto y 822 km/h en el inicio. Sabiendo de antes que la aceleración vale 514 km/h^2 , obtenemos

$$822 - 800 = 514 \cdot \Delta t \rightarrow \Delta t = 0,043 \text{ h} \approx 2,5 \text{ min}.$$

h) En el momento de la foto el avión está cerca de Portugal, a unos 250 km del punto de despegue. Con la aceleración de 514 km/h^2 debería haber salido de Madrid aproximadamente 1 hora antes:

$$250 = \frac{1}{2} \cdot 514 \cdot t^2 \rightarrow t \approx 1 \text{ h}.$$

Pero entonces la velocidad del avión, tras ese tiempo, sería

$$v = 514 \cdot t \rightarrow v \approx 514 \text{ km/h} < 800 \text{ km/h},$$

que es bastante menor que los 800 km/h que lleva el avión en el momento de la foto. De hecho, quien haya volado en avión desde Madrid hacia el Atlántico sabrá que 1 h es demasiado tiempo para llegar a la frontera de Portugal. En conclusión, el movimiento no ha sido uniformemente acelerado y la aceleración ha sido mayor en los primeros kilómetros.

Podemos estimar una aceleración media desde el despegue hasta el instante actual imponiendo las dos condiciones de contorno conocidas (distancia recorrida y velocidad actual). También podemos estimar así el tiempo aproximado desde el despegue:

$$\begin{cases} 250 = \frac{1}{2} \bar{a} t^2 \\ 800 = \bar{a} t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \bar{a} = 1280 \text{ km/h}^2 \\ t = 0,625 \text{ h} = 37,5 \text{ min} \end{cases}.$$

Con esta estimación para el tiempo y utilizando la velocidad de ascenso, $v_y = 3,44 \text{ m/s}$, la altitud del avión debería ser

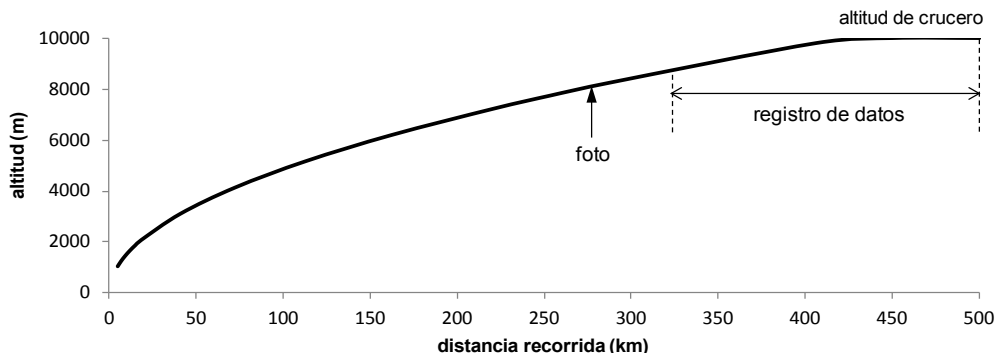
$$h = v_y t = 3,44 \cdot (0,625 \cdot 3600) = 7740 \text{ m},$$

que es prácticamente la misma que se ve en la foto (7837 m). Parece, por tanto, razonable suponer que el ritmo de la ascensión sí ha sido aproximadamente uniforme a la velocidad $v_y = 3,44 \text{ m/s}$.

i) El movimiento vertical es uniforme. El movimiento horizontal es acelerado; y como aproximación suponemos que es uniformemente acelerado con aceleración $a_x \approx \bar{a} = 1280 \text{ km/h}^2 = 0,1 \text{ m/s}^2$. La trayectoria vendrá descrita aproximadamente por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 3,44 t \\ x = \frac{0,1}{2} t^2 \end{cases}.$$

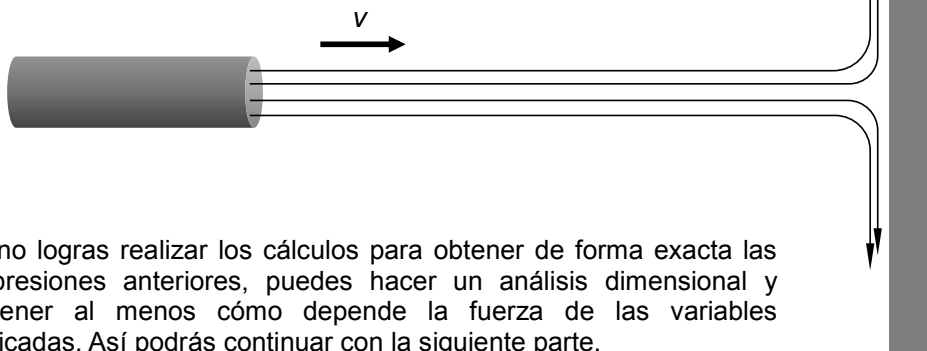
Representamos la trayectoria, $y = 15,5\sqrt{x}$, sin contar los primeros minutos tras el despegue (cuando la trayectoria del avión es más inclinada y lleva una aceleración muy grande, por lo que no serán válidas las aproximaciones hechas).



66. La fuerza de un chorro de agua

De una manguera de área transversal A sale una corriente de agua de densidad ρ y velocidad v que incide contra una pared perpendicular al chorro. Tras golpear la pared el agua fluye hacia los lados a lo largo de la pared. Despreciamos el efecto de la gravedad.

- a) Calcula la fuerza que sufre la pared en función de A , ρ y v .
- b) Expresa la fuerza en función del caudal Q , ρ y v . (El caudal es el volumen por unidad de tiempo).
- c) Calcula la presión sobre la pared en función de ρ y v .



Si no logras realizar los cálculos para obtener de forma exacta las expresiones anteriores, puedes hacer un análisis dimensional y obtener al menos cómo depende la fuerza de las variables indicadas. Así podrás continuar con la siguiente parte.

El “corte por chorro de agua” es una técnica industrial que utiliza una bomba de ultrapresión para lanzar contra un material un chorro de agua muy fino. Antes de salir, el agua se mezcla con arena abrasiva. Cuando el chorro impacta a altísimas velocidades, el resultado es el corte del material.

Considera que la máquina expulsa el agua por una boquilla de 0,8 mm de diámetro, y que el chorro sale a 1000 m/s. Dato: densidad del agua = 1000 kg/m³. Calcula:

- d) El caudal de salida en m³/s y en litros/s.
- e) La fuerza del agua sobre el material.
- f) La presión del agua sobre el material.

Resolución

- a) Por la 2ª ley de Newton,

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = \rho V \frac{(v-0)}{\Delta t} = \rho A \Delta x \frac{v}{\Delta t} \rightarrow F = A \rho v^2.$$

- b) El caudal es volumen por unidad de tiempo y, por tanto, es igual a la sección por la velocidad:

$$Q = \frac{V}{\Delta t} = \frac{A \Delta x}{\Delta t} = A v.$$

Entonces, la fuerza también puede expresarse como

$$F = Q\rho v.$$

c) La presión sobre la pared es la fuerza por unidad de superficie:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{A\rho v^2}{A} = \rho v^2.$$

d) El caudal de salida para los datos del problema es

$$Q = Av = (\pi r^2)v = \pi \cdot (0,8 / 2 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 1000 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} = 0,5 \text{ litros/s}.$$

e) Y la fuerza del agua sobre el material es

$$F = Q\rho v = 5 \cdot 10^{-4} \cdot 1000 \cdot 1000 = 500 \text{ N}.$$

(Esta fuerza es equivalente al peso de una persona de unos 50 kg, pero aplicada en una superficie del material de sólo 0,8 mm de diámetro.)

f) La presión del agua sobre el material es

$$P = \rho v^2 = 1000 \cdot 1000^2 = 10^9 \text{ Pa} = 1 \text{ GPa}.$$

(Esta presión es casi diez mil veces la presión atmosférica).

Saber más

Las hidrolimpiadoras también utilizan un chorro de agua para la limpieza de superficies. En este caso las velocidades de salida pueden llegar hasta los 100 m/s, lo que supone presiones sobre la superficie equivalentes a cien veces la atmosférica.

El *jet water*, *hydroflight* o *flyboard* es un deporte acuático en el que una persona se mantiene en suspensión en el aire montada sobre una tabla de la que sale un gran chorro de agua hacia abajo. La velocidad de salida del agua por la manguera es de unos 10 m/s, y la bomba expulsa un caudal de agua de unos 100 litros/s. Así que la fuerza de propulsión puede compensar el peso de la persona.

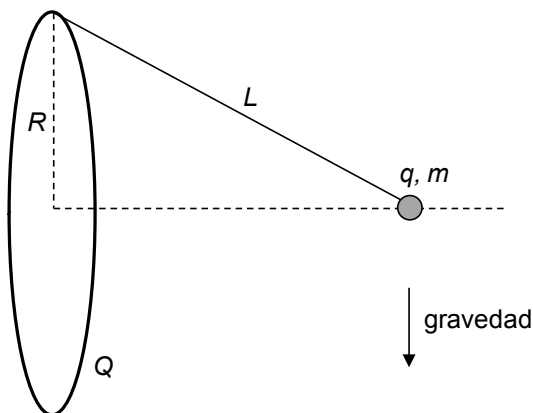


67. El anillo cargado

Una pequeña bola de masa m y carga q está suspendida por medio de un hilo del punto más alto de un anillo metálico de radio R que se encuentra en un plano vertical. El anillo está hecho de un alambre rígido de sección despreciable, y tiene una carga Q , del mismo signo que q , uniformemente distribuida. El hilo es aislante y de masa despreciable.

Obtén una expresión para la longitud L del hilo en función de Q , q , R , m , g y ε_0 de tal modo que la posición de equilibrio de la bola se encuentre en el eje de simetría perpendicular al plano del anillo.

(Haz un dibujo donde se vean claramente las fuerzas actuantes).



Resolución

Cada elemento infinitesimal del anillo ejerce una fuerza sobre la carga q igual a

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{L^2} dQ.$$

Pero las componentes transversales (en el plano paralelo al anillo) de estas fuerzas se anulan por parejas, pues cada elemento infinitesimal tiene otro en el lado opuesto.

Las componentes en el eje X (donde está la carga q) son $dF_x = dF \cos \alpha$, donde

$$\sin \alpha = \frac{R}{L}.$$

La fuerza total sobre la carga en el eje X igualará a la componente X de la tensión:

$$F_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{L^2} \cos \alpha \equiv T \cos \alpha \rightarrow T = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{L^2}.$$

La componente Y de la tensión igualará al peso:

$$T \sin \alpha \equiv mg \rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{L^2} \frac{R}{L} = mg \rightarrow L^3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQR}{mg}.$$

68. Nuestra voz modificada

La velocidad del sonido en los gases depende de la presión del gas, P , de su densidad, ρ , y del llamado coeficiente adiabático de dilatación, γ :

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}.$$

Los valores de ρ y γ para el aire, el helio (He) y el hexafluoruro de azufre (SF_6) son (a 20 °C):

$$\rho_{\text{aire}} = 1,2 \text{ kg/m}^3, \quad \rho_{\text{He}} = 0,17 \text{ kg/m}^3, \quad \rho_{\text{SF}_6} = 6,1 \text{ kg/m}^3$$

$$\gamma_{\text{aire}} = 1,4, \quad \gamma_{\text{He}} = 1,7, \quad \gamma_{\text{SF}_6} = 1,1.$$

Consideramos en todos los casos una presión de 1 atmósfera ($\approx 10^5 \text{ Pa}$).

a) Calcula la velocidad del sonido en los tres medios.

Vamos a considerar un modelo sencillo para la laringe suponiendo que se comporta como un tubo sonoro con un extremo abierto y otro cerrado. Toma el modo fundamental de vibración.

b) ¿Cuánto mide la laringe de una persona cuya voz tiene un espectro centrado en 500 Hz?

c) Si almacenamos gas He y gas SF_6 en los pulmones y emitimos sonidos, ¿cómo será el tono de nuestra voz (igual, más grave o más agudo) en comparación con nuestro tono normal?

Resolución

a) Calculamos las tres velocidades del sonido con los datos proporcionados:

$$v_{\text{aire}} = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 10^5}{1,2}} = 342 \text{ m/s}, \quad v_{\text{He}} = \sqrt{\frac{1,7 \cdot 10^5}{0,17}} = 1000 \text{ m/s}, \quad v_{\text{SF}_6} = \sqrt{\frac{1,1 \cdot 10^5}{6,1}} = 134 \text{ m/s}.$$

b) Como la laringe se comporta como un tubo sonoro con un extremo abierto y otro cerrado, cuando pasa el aire impulsado por los pulmones se producen ondas estacionarias que satisfacen la condición $L = (2n+1) \lambda / 4$, con $n = 0, 1, 2, \dots$. En el modo fundamental sólo se emiten sonidos de frecuencias que cumplen

$$f = \frac{v}{4L}.$$

Entonces, la longitud del tubo es

$$L = \frac{v}{4f} = \frac{342}{4 \cdot 500} = 17 \text{ cm}.$$

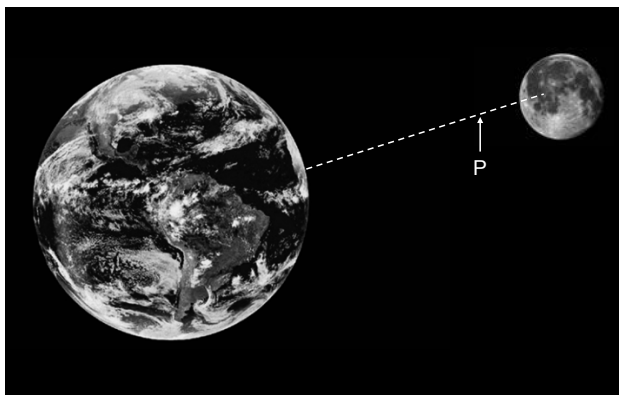
(La velocidad del aire en el medio determina la frecuencia emitida, pues es la presión sonora la que vibra en resonancia dentro del tubo.)

c) Respecto al aire el sonido es más agudo en el He y más grave en el SF_6 .

69. De la Tierra a la Luna: misión Apolo 11, 1969

Vamos a lanzar una nave de masa m desde la superficie de la Tierra hasta la Luna. Despreciamos la velocidad de rotación de la Tierra. Suponemos que la Luna se mantiene fija durante el viaje.

Llamamos d a la distancia Tierra-Luna, M_T a la masa de la Tierra, M_L a la masa de la Luna, R_T al radio de la Tierra, y R_L al radio de la Luna.



Datos: $M_T = 81M_L$, $R_T = 3,7R_L$, $d = 60R_T$, $M_T = 5,97 \times 10^{24}$ kg, $R_T = 6371$ km, $d = 384\,000$ km, $G = 6,67 \times 10^{-11}$ N·m²/kg².

- a) Calcula el valor de la velocidad de escape, v_e , de la Tierra.
 - b) Determina el punto P en la línea Tierra-Luna donde la fuerza neta sobre la nave es nula (indica su distancia desde la Tierra respecto a la distancia total Tierra-Luna).
 - c) Calcula la velocidad mínima, $v_{\min}$, a la que se debe lanzar la nave para que pueda llegar al punto P. Expresa $v_{\min}$ en función de v_e y calcula también su valor.
- En el punto P la nave está en equilibrio inestable. Si se perturba lo más mínimo su posición, entonces caerá de nuevo hacia la Tierra o caerá hacia la Luna. Supongamos que la perturbación hace que la nave empiece a caer hacia la Luna.
- d) ¿Cuál es la velocidad v_L de la nave al llegar a la superficie de la Luna?
 - e) Haz una estimación del tiempo (en horas) empleado por la nave en llegar a la Luna. (Ayuda: aunque la aceleración no es constante, utiliza las velocidades medias en los dos tramos del viaje como si la aceleración hubiera sido constante).
 - f) Valora hasta qué punto es buena la aproximación de que la Luna está fija durante el viaje. Para ello, calcula primero el ángulo que se ha movido la Luna desde que la nave se lanza hasta que llega. Haz un dibujo de la situación.

Consideramos ahora que la nave se lanza con una velocidad $v_0 \geq v_{\min}$.

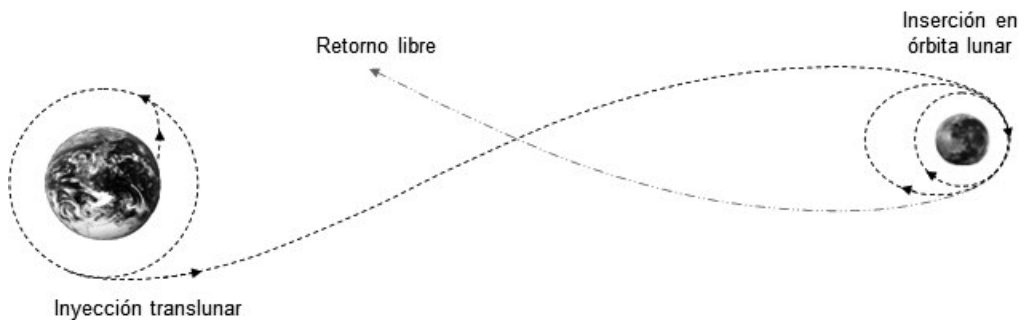
- g) A partir de la aceleración de la nave obtén una expresión general para la velocidad $v(x)$ a una distancia x cualquiera entre $x = R_T$ y $x = d - R_L$, en función de la velocidad v_0 de lanzamiento. Ayuda: utiliza la transformación

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}.$$

Representa la función $v(x)$ para $v_0 = v_{\min}$, $v_0 = v_e$ y $v_0 = 1,1v_e$

- h) A partir de la gráfica, estima de nuevo del tiempo entre la Tierra y la Luna.

Vamos ahora a reproducir la misión del Apolo 11 que llevó al hombre por primera vez a la Luna. En la realidad, el lanzamiento no es tan simple y directo como hemos visto en los apartados anteriores. En primer lugar, la nave se pone en una órbita (*parking orbit*) alrededor de la Tierra, y allí se comprueba el estado de la misión. Desde esa órbita, los motores propulsan a la nave hacia la Luna (*inyección translunar*). Otra de las cosas a tener en cuenta es que la nave no puede dirigirse justo al centro de la Luna, pues se estrellaría sobre su superficie a la velocidad final que hemos calculado previamente. Por ello, la nave se lanza hacia uno de los lados de la Luna; así pasa cerca de ella, la sobrepasa y después vuelve por el otro lado por la propia atracción gravitatoria lunar (ver dibujo). De esa manera la nave regresaría de vuelta a la Tierra en una trayectoria llamada de *retorno libre*. Por ello, cuando la nave está cerca de la Luna enciende sus motores para frenarse y, así, al reducir su velocidad queda atrapada en una órbita elíptica alrededor de la Luna (*inserción en órbita lunar*). En una segunda maniobra de frenado, la nave entra en una órbita circular. El Apolo 11 está formado por el módulo lunar Eagle y el módulo Columbia. Una vez en la órbita circular, el Eagle se separó y descendió hacia la superficie de la Luna mientras el Columbia se mantuvo en órbita dando vueltas a la Luna durante dos días. Cuando el Eagle ascendió y se unió de nuevo al Columbia (maniobra de *rendezvous*), la nave propulsó los motores para retornar a la Tierra.



Utilizamos los siguientes datos de la misión Apolo 11 de la NASA para continuar con el problema:

- 1) Órbita de parking a 188 km de altura de la Tierra.
 - 2) Inyección translunar a 10832 m/s desde un punto a 336 km de altura de la Tierra.
 - 3) Inserción en una órbita lunar de alturas de periastro y apoastro 111 km y 315 km.
- i) Calcula la velocidad v_p en la órbita de parking.
 - j) Obtén la expresión para la velocidad $v(x)$ del Apolo 11 en cualquier punto entre la órbita de parking y la Luna. Representa la curva.
 - k) Calcula la velocidad mínima $v_{\min}$ para poder llegar a la Luna desde la órbita de parking.
 - l) Obtén la disminución de velocidad del Apolo al frenar los motores y hacer la inserción en la órbita lunar.
 - m) ¿Cuánto tiempo empleó el Apolo desde la órbita de parking en la Tierra hasta la órbita lunar?

Resolución

a) La velocidad de escape desde la superficie terrestre es

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{6371 \cdot 10^3}} = 11180,5 \text{ m/s}.$$

b) La fuerza total sobre la nave en un punto situado a distancia x de la Tierra y distancia $d - x$ de la Luna es la suma de la fuerza que ejerce la Tierra más la fuerza que ejerce la Luna:

$$F = -\frac{GM_T m}{x^2} + \frac{GM_L m}{(d-x)^2}.$$

En el punto P la fuerza de la Tierra y la de la Luna son iguales:

$$\frac{GM_T m}{x^2} = \frac{GM_L m}{(d-x)^2} \rightarrow \frac{81M_L}{x^2} = \frac{M_L}{(d-x)^2} \rightarrow 81(d-x)^2 = x^2.$$

Resolviendo la ecuación llegamos a

$$9(d-x) = x \rightarrow 9d = 10x \rightarrow x = 0,9d,$$

es decir, la fuerza es nula en un punto situado a $0,9d$ de la Tierra y $0,1d$ de la Luna.

c) La nave debe llegar justo al punto P, lo haría con velocidad nula. Por conservación de la energía, la energía total en la superficie terrestre es igual a la energía total en el punto P:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{R_T} - \frac{GM_L m}{d} = -\frac{GM_T m}{x} - \frac{GM_L m}{d-x}.$$

Despejamos la velocidad teniendo en cuenta que $x = 0,9d$:

$$v^2 = 2G \left(\frac{M_T}{R_T} - \frac{M_T}{x} + \frac{M_L}{d} - \frac{M_L}{d-x} \right) = 2G \left(\frac{M_T}{R_T} - \frac{M_T}{0,9d} + \frac{M_T/81}{d} - \frac{M_T/81}{0,1d} \right),$$

$$v^2 = 2G \left(\frac{M_T}{R_T} - \frac{M_T}{0,9 \cdot 60R_T} + \frac{M_T/81}{60R_T} - \frac{M_T/81}{0,1 \cdot 60R_T} \right) = v_e \left(1 - \frac{1}{0,9 \cdot 60} + \frac{1}{\underbrace{81 \cdot 60}_{\approx 0}} - \frac{1}{\underbrace{81 \cdot 0,1 \cdot 60}_{\approx 0}} \right)$$

$$v_{\min} \approx 0,99 v_e$$

$$v_{\min} = 11065 \text{ m/s}.$$

(La atracción gravitatoria de la Luna ayuda muy poco al lanzamiento de la nave).

d) Aplicamos otra vez la conservación de la energía:

$$-\frac{GM_T m}{0,9d} - \frac{GM_L m}{0,1d} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{d} - \frac{GM_L m}{R_L}.$$

$$v_L = v_e \sqrt{\frac{1}{60} + \frac{3,7}{81} - \frac{1}{0,9 \cdot 60} - \frac{1}{81 \cdot 0,1 \cdot 60}} = 0,209 v_e = 2335 \text{ m/s}.$$

e) Suponemos que de la Tierra al punto P el cohete lleva una velocidad media igual a

$$\frac{11068,7 + 0}{2} = 5534 \text{ m/s}.$$

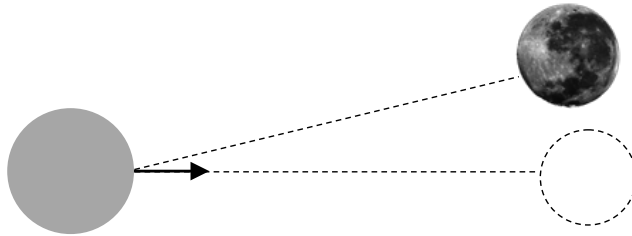
Y que del punto P a la Luna la velocidad media es

$$\frac{0 + 2285}{2} = 1142 \text{ m/s}.$$

Entonces el tiempo total es la suma de los dos tiempos de cada tramo:

$$\frac{0,9d}{5534} + \frac{0,1d}{1142} = 17,3 \text{ h} + 9,3 \text{ h} = 26,6 \text{ h}.$$

f) En el tiempo estimado antes (26 horas) la Luna ha recorrido un ángulo de 14° en su órbita respecto a la Tierra. Es un ángulo considerable y, por tanto, la aproximación de que la Luna está estática no es buena. De hecho, en el cálculo real de trayectorias espaciales es imprescindible tener en cuenta este hecho.



g) A partir de la aceleración podemos integrar para obtener la velocidad:

$$a = -\frac{GM_T}{x^2} + \frac{GM_L}{(d-x)^2} \equiv v \frac{dv}{dx} \rightarrow -GM_T \frac{dx}{x^2} + GM_L \frac{dx}{(d-x)^2} = v dv,$$

$$-GM_T \int_{R_T}^x \frac{dx}{x^2} + GM_L \int_{R_T}^x \frac{dx}{(d-x)^2} = \int_{v_0}^v v dv \rightarrow GM_T \left[\frac{1}{x} \right]_{R_T}^x + GM_L \left[\frac{1}{d-x} \right]_{R_T}^x = \left[\frac{1}{2} v^2 \right]_{v_0}^v$$

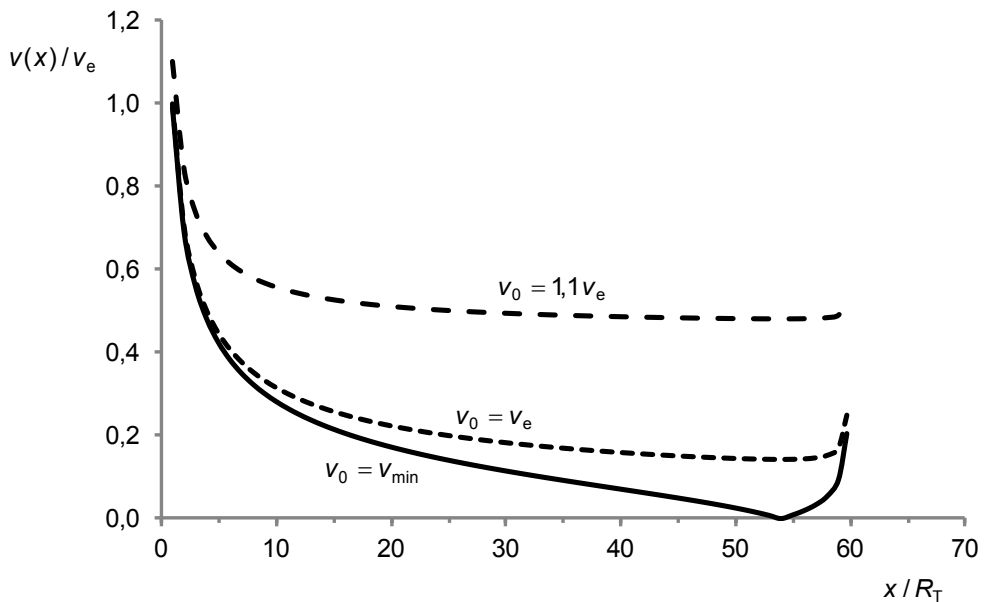
$$v^2 = v_0^2 + \frac{2GM_T}{x} - \frac{2GM_T}{R_T} + \frac{2GM_L}{d-x} - \frac{2GM_L}{d-R_T}.$$

Ponemos todas las dimensiones en función de las de la Tierra:

$$v(x)^2 = v_0^2 + v_e^2 \left(\frac{1}{x/R_T} + \frac{1}{81 \cdot (60 - x/R_T)} - 1 - \frac{1}{81 \cdot 59} \right).$$

(Al mismo resultado se llega a partir de la conservación de la energía.)

En la siguiente gráfica se ha representado la anterior expresión $v(x)/v_e$, desde $x = R_T$ a $x = d - R_L$, para varios valores de v_0 .



h) La expresión de $v(x)$ se puede integrar para obtener el tiempo:

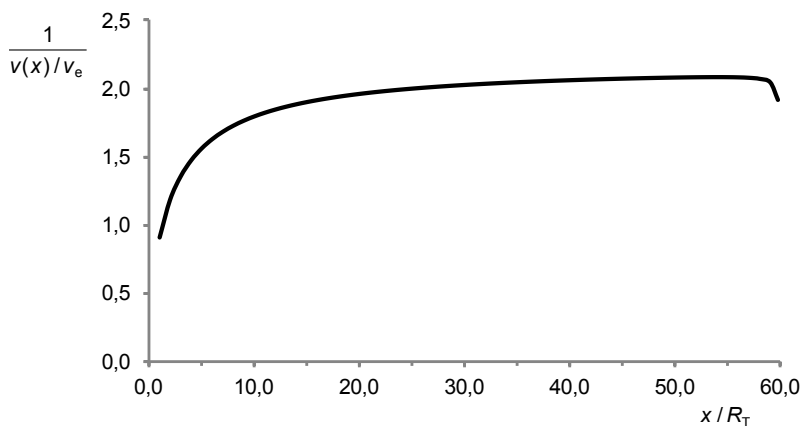
$$v(x) = \frac{dx}{dt} \rightarrow dt = \frac{dx}{v(x)} \rightarrow t = \int_{R_T}^{d-R_L} \frac{dx}{v(x)}.$$

La integral hay que realizarla numéricamente (en internet hay calculadoras de integrales online). El resultado es

$$v_0 = v_e \rightarrow t \approx 5 \frac{d}{v_e} = 47,7 \text{ h} \approx 2 \text{ días}$$

$$v_0 = 1,1 v_e \rightarrow t \approx 2 \frac{d}{v_e} = 19 \text{ h}$$

También podemos representar la inversa de $v(x)$ y estimar el área gráficamente. La figura corresponde al caso $v_0 = 1,1 v_e$.



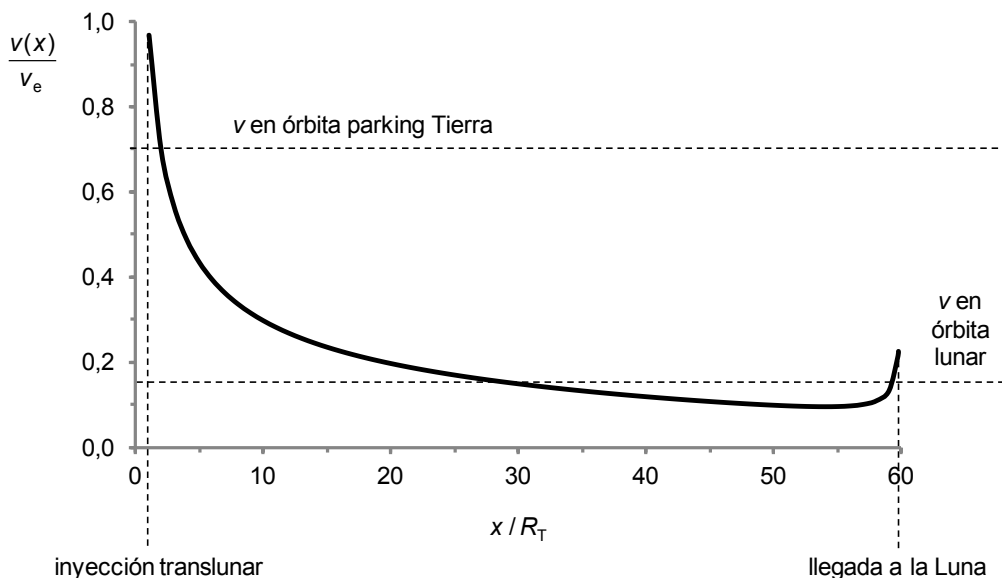
i) La velocidad v_p en la órbita de parking a 188 km de altura es

$$v_p = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{(6371+188) \cdot 10^3}} = 7792 \text{ m/s}.$$

j) La velocidad $v(x)$ del Apolo 11 la obtenemos como en el apartado g, por ejemplo mediante la conservación de la energía, con la diferencia de que ahora el lanzamiento (la inyección translunar) no es desde la superficie terrestre sino desde un punto a distancia x_0 desde el centro de la Tierra. Llamamos v_0 a la velocidad de la inyección translunar. La expresión de la velocidad queda

$$v(x)^2 = v_0^2 + v_e^2 \left(\frac{1}{x/R_T} + \frac{1}{81 \cdot (60 - x/R_T)} - \frac{1}{x_0/R_T} - \frac{1}{81 \cdot (60 - x_0/R_T)} \right).$$

La representación gráfica de la velocidad es la siguiente:



k) La velocidad mínima $v_{\min}$ para poder llegar a la Luna desde la órbita de parking es

$$v_{\min} = v_e \sqrt{\frac{1}{x_0/R_T} + \frac{1}{81 \cdot (60 - x/R_T)} - \frac{1}{54} - \frac{1}{486}}.$$

Como $x_0 = 6371 + 336 = 6707 \text{ km} \rightarrow x_0 / R_T = 1,053$. La velocidad mínima resulta

$$v_{\min} = 0,964 v_e = 10778 \text{ m/s}.$$

La velocidad de la inyección es $v_0 = 10832 \text{ m/s} = 0,9689 v_e$, ligeramente superior a la mínima para así asegurar la entrada en la zona de influencia lunar según hemos discutido en el apartado c.

l) Para hallar la disminución de velocidad del Apolo en la inserción en órbita lunar, primero obtenemos la velocidad del Apolo al llegar a la Luna. En el punto

$$x = d - R_L = 60R_T - R_T / 3,7 = 59,73R_T,$$

la velocidad del apartado j resulta

$$v_L = v(59,73R_T) = 0,226v_e = 2527 \text{ m/s}.$$

El Apolo entra en una órbita elíptica cuyos radios orbitales del periastro y el apoastro son $r_p = R_L + 111 = 1848 \text{ km}$ y $r_a = R_L + 315 = 2052 \text{ km}$, respectivamente. Entonces, el semieje mayor de la elipse es $a = (r_a + r_p) / 2 = 1950 \text{ km}$. La nave se frena cuando está en el periastro. La velocidad en el periastro de una órbita elíptica es

$$v_p = \sqrt{2GM_L \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{2a} \right)} = 1673 \text{ m/s}.$$

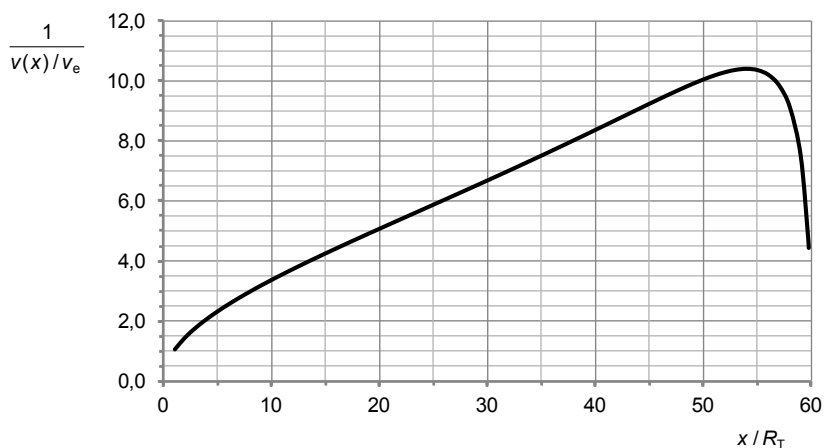
Como el Apolo va en ese momento a $v_L = 2527 \text{ m/s}$, la disminución de velocidad que debe realizar para entrar en la órbita lunar es

$$\Delta v = 1673 - 2527 = -854 \text{ m/s}.$$

m) Para calcular el tiempo de viaje del Apolo repetimos el procedimiento del apartado h. Integramos numéricamente o gráficamente:

$$t = \int_{x_0}^{d-R_L} \frac{dx}{v(x)}, \quad \text{con} \quad \frac{v(x)}{v_e} = \sqrt{\frac{1}{x/R_T} + \frac{1}{81 \cdot (60 - x/R_T)} - 0,011}.$$

Hemos utilizado $x_0 / R_T = 1,053$ y $v_0 = 0,9689v_e$.



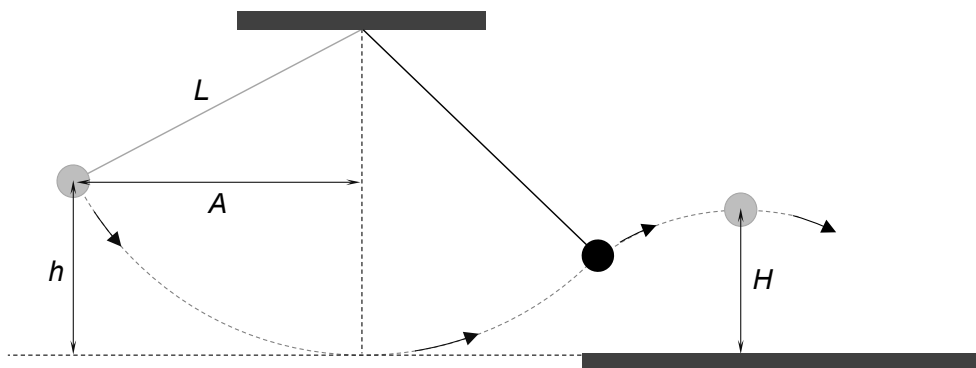
La integral da un tiempo $t = 390 R_T / v_e \approx 62$ horas.

Saber más

<https://www.nasa.gov/specials/apollo50th/>.

70. Pendulaciones

Construimos un péndulo atando una esferita de masa m y radio despreciable al extremo de un hilo inextensible de longitud L y masa despreciable. El otro extremo del hilo está sujeto a un punto fijo del techo. Tomamos el punto más bajo del péndulo como referencia para medir alturas. Dicho punto está a ras del tablero de una mesa situada a la derecha del péndulo. Llamamos eje X al horizontal y eje Y al vertical.



Separamos la esfera una distancia A desde la vertical (manteniendo el hilo estirado) hasta situarla a una altura h .

a) Obtén la distancia A en función de L y h .

Soltamos la esfera y el péndulo empieza a oscilar.

b) Obtén la velocidad $v_{\max}$ en el punto más bajo.

c) Obtén la expresión de la tensión T del hilo (en función de m , g , L y h) cuando la esfera está en el punto más alto y cuando está en el punto más bajo.

d) Supón que el hilo se rompe justo cuando la esfera está en el punto más alto. Explica qué le ocurre a la esfera.

e) Supón ahora que el hilo se rompe justo cuando forma un ángulo de 45° con la vertical. Obtén la altura máxima H que alcanzará la esfera.

f) Si el calor específico de la esfera es c_e , obtén el incremento de temperatura ΔT que experimentará la esfera cuando caiga sobre la mesa, suponiendo que toda su energía se transforma en calor y que la mesa no absorbe ningún calor.

Si la distancia A es pequeña (oscilaciones pequeñas) podemos considerar que la oscilación ocurre en el eje X.

g) Indica cuál es el período de oscilación y escribe la expresión $x(t)$ de las oscilaciones.

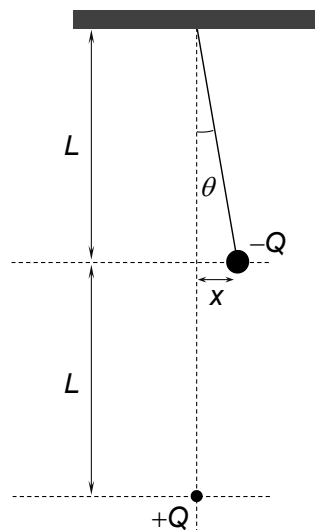
Cargamos la esfera con una carga negativa $-Q$, y situamos una carga fija de igual valor y signo opuesto $(+Q)$ a una distancia $2L$ del techo en la vertical que pasa por el enganche del péndulo (ver figura).

h) Escribe la expresión del módulo de la fuerza electrostática que actúa sobre la esfera del péndulo, cuando está a una distancia x de la vertical.

Sigue considerando oscilaciones pequeñas en el eje X . Utiliza la aproximación

$$\sin \theta \approx x / L .$$

i) Teniendo en cuenta la influencia de la carga, obtén una nueva expresión para el período del péndulo (en función de m , g , L , Q y la constante de Coulomb K). Si no logras deducirla, propón de forma justificada una posible expresión que tenga sentido físico.



Resolución

a) A la vista del dibujo, aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene la relación

$$(L - h)^2 + A^2 = L^2 ,$$

de donde despejamos para encontrar la solución:

$$A = \sqrt{2Lh - h^2} .$$

b) Aplicamos el principio de conservación de la energía. La energía potencial de la esfera cuando se suelta es igual a su energía cinética en el punto más bajo:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 .$$

Por tanto, la velocidad máxima en el punto inferior de la trayectoria es

$$v_{\max} = \sqrt{2gh} .$$

c) Sobre la esfera actúan dos fuerzas: el peso $P = mg$ y la tensión T . Analizamos la dinámica de este movimiento circular para la componente radial (o normal). La tensión del hilo actúa directamente en esta dirección normal y la componente normal del peso es $T = mg \cos \theta$, donde θ es el ángulo que forma el hilo con la vertical en cada punto de la trayectoria. Por otro lado, sabemos que la aceleración normal en el movimiento circular es $a_n = v^2 / R$, donde v es la velocidad de la esfera en cada punto de la trayectoria de radio $R = L$. Así, la 2ª ley de Newton es

$$T - mg \cos \theta = ma_n = m \frac{v^2}{L} .$$

Vemos que la tensión no es constante, sino que varía dependiendo de la posición de la esfera a lo largo de la trayectoria circular. Es mínima en el punto más alto y máxima en el punto más bajo*.

En el punto más alto la velocidad de la esfera es nula y el hilo forma un ángulo $\theta_{\max}$ con la vertical tal que $\cos \theta_{\max} = (L - h) / L$. Por tanto, la tensión queda

$$T_{\min} = mg \cos \theta_{\max} = mg \left(1 - \frac{h}{L} \right).$$

En el punto más bajo el ángulo θ es cero y la velocidad es $v_{\max} = \sqrt{2gh}$. Entonces, la tensión es

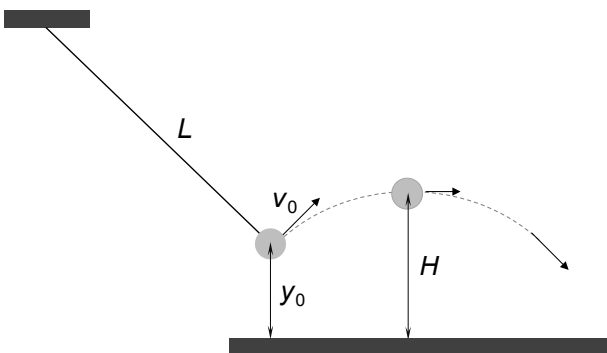
$$T_{\max} = mg + m \frac{2gh}{L} = mg \left(1 + 2 \frac{h}{L} \right).$$

d) Cuando la esfera está en el punto más alto su velocidad es cero. Si se rompe el hilo en ese momento, la esfera experimentará una caída libre.

e) Tras la ruptura del hilo la esfera describe un tiro parabólico. Tenemos que suponer que la esfera se soltó inicialmente desde una posición tal que el ángulo entre el hilo y la vertical era superior a 45° (es imposible que hubiera sido menor, por conservación de la energía; y si hubiera sido exactamente igual a 45° estaríamos en el caso anterior con una caída libre).

Llamemos y_0 a la altura sobre el plano de la mesa a la que se encuentra la esfera cuando se rompe el hilo, y v_0 a su velocidad. Éstas serán la altura inicial y la velocidad inicial del movimiento parabólico. Por trigonometría obtenemos que la altura inicial vale

$$y_0 = L - L \cos 45^\circ.$$



Y la velocidad inicial la calculamos a partir de la conservación de la energía:

$$mgh = mgy_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 \rightarrow v_0^2 = 2g(h - y_0).$$

La altura máxima en un tiro parabólico es

$$H = y_0 + \frac{(v_0 \sin 45^\circ)^2}{2g}.$$

Introduciendo los valores de y_0 y v_0 queda

$$H = L - L \cos 45^\circ + \frac{2g(h - (L - L \cos 45^\circ))(\sin 45^\circ)^2}{2g} = \frac{h}{2} + \frac{L}{2}(1 - \cos 45^\circ).$$

Esta altura máxima será siempre menor que la altura inicial, h , desde donde se soltó la bola, ya que una parte de la velocidad inicial cuando se rompe el hilo todavía la conserva la esfera en el punto más alto del tiro parabólico en la componente horizontal de la velocidad.

f) Cuando la esfera cae sobre la mesa lleva la velocidad $v_{\max} = \sqrt{2gh}$. Suponiendo que en el choque toda la energía cinética se transforma en calor (y que la mesa no absorbe nada), la conservación de la energía nos permite escribir

$$Q = mc_e \Delta T = \frac{1}{2} m v_{\max}^2.$$

Así, el incremento de temperatura de la esfera es

$$\Delta T = \frac{gh}{c_e}.$$

g) La 2ª ley de Newton para la componente tangencial del movimiento se escribe $-mg \sin \theta = ma_t$. En el caso de pequeñas oscilaciones suponemos que la aceleración tangencial está en la dirección X, resultando la ecuación diferencial del movimiento armónico simple:

$$\ddot{x} + \frac{g}{L} x = 0.$$

Cuya solución es

$$x(t) = A \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right),$$

donde el período de oscilación es el conocido para el péndulo simple:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

h) La distancia entre las dos cargas es $r = \sqrt{L^2 + x^2}$ cuando la esfera está a distancia x de la vertical. El módulo de la fuerza electrostática que ejerce la carga $+Q$ sobre la carga $-Q$ (esfera del péndulo) es

$$F = K \frac{Q^2}{r^2} = K \frac{Q^2}{L^2 + x^2}.$$

i) La esfera cargada experimenta una fuerza de Coulomb de atracción hacia la otra carga dada por

$$F_C = K \frac{Q^2}{r^2},$$

donde r es la separación entre las cargas. Para pequeñas oscilaciones se tiene que $r^2 \simeq L^2$.

Volvemos a escribir la 2ª ley de Newton para la componente tangencial del movimiento teniendo en cuenta que, además de la componente tangencial del peso, actúa la componente tangencial de la fuerza eléctrica:

$$-mg \sin \theta - K \frac{Q^2}{r^2} \sin(2\theta) = ma_t = mL\ddot{\theta}.$$

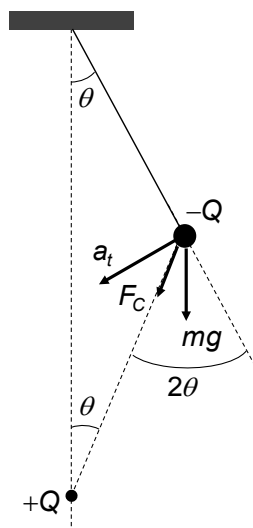
Nótese que en la proyección de la fuerza eléctrica sobre la dirección tangencial aparece un ángulo 2θ , a diferencia de la proyección de la fuerza peso. Ello es debido a la distinta orientación de ambas fuerzas, como puede verse en el dibujo. En este caso, la orientación de la fuerza eléctrica favorece más que el peso a las oscilaciones.

Para pequeñas oscilaciones

$$-mg\theta - K\frac{Q^2}{L^2}2\theta = mL\ddot{\theta} \rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{g}{L} + K\frac{2Q^2}{mL^3}\right)\theta = 0.$$

Por tanto, el período es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g + K\frac{2Q^2}{mL^2}}}.$$



Saber más

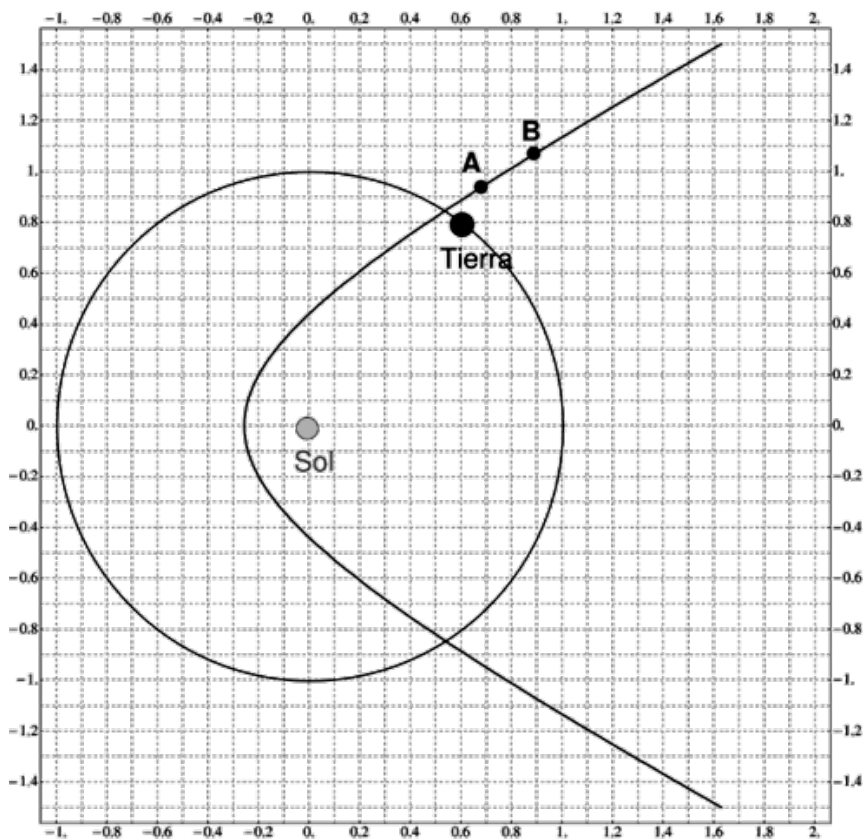
Investiga sobre los péndulos magnéticos y sobre los péndulos cargados entre dos placas de un condensador.

* Nótese que la tensión obtenida en el punto más bajo difiere de la que obtendríamos en el caso estático, donde la tensión de la cuerda sería igual directamente al peso de esfera colgada. El término adicional $2mgh/L$ aparece en el caso del problema dinámico, ya que la tensión de la cuerda es la responsable de la aceleración normal que produce el cambio de la dirección de la velocidad tangencial.

71. El asteroide interestelar Oumuamua

En octubre de 2017 se descubrió el que se cree que es el primer objeto detectado que pasa por el Sistema Solar pero que proviene de fuera de él. Se piensa que es un asteroide y se le llamó Oumuamua, que significa “primer mensajero lejano” en idioma hawaiano. Se estimó que seguía una trayectoria hiperbólica, cuya parte más cercana al Sol se muestra en la figura. (En realidad la hipérbola no está en el mismo plano que la órbita de la Tierra, pero supondremos que sí por simplicidad). Las distancias en la figura están en unidades astronómicas, UA (1 UA = distancia Tierra-Sol = 150×10^6 km). La primera vez que se observó fue el 19 de octubre y el asteroide estaba en el punto A, y el 28 de octubre estaba en el punto B. Consideraremos en este problema que la única influencia gravitatoria relevante es la del Sol.

a) Determina la expresión de la velocidad del asteroide, $v(r)$, en función de la distancia al Sol, r , la distancia al Sol el primer día que se observó, r_A , y la velocidad cuando se observó, v_A . (Ayuda: utiliza la conservación de la energía mecánica).



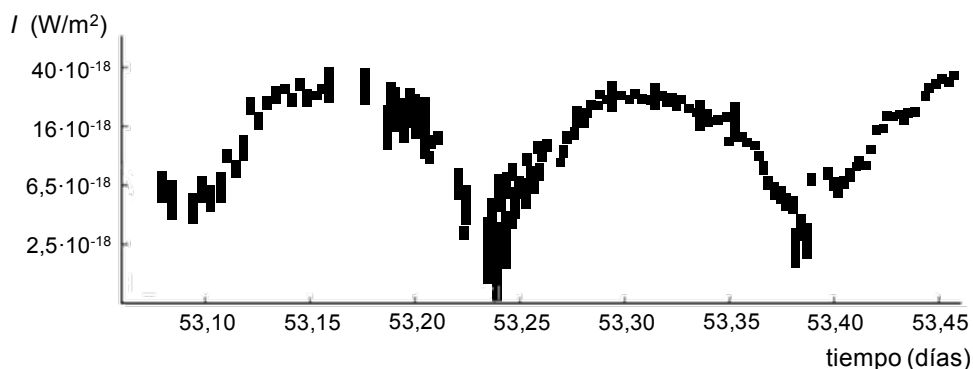
b) Realizando las mediciones sobre la figura que consideres oportuno, calcula los valores de r_A y de v_A (en km/s). (Considera que entre A y B el movimiento es aproximadamente uniforme).

Obtén la velocidad, v_p , en el perihelio (punto de la trayectoria más cercano al Sol).

¿Cuánto vale la velocidad en el límite muy lejos del Sol, v_{∞} ? ¿Es la energía mecánica total de Oumuamua positiva o negativa? En vista del resultado numérico obtenido, razona por qué se cree que Oumuamua viene de fuera del Sistema Solar. Datos: $G = 6,67 \times 10^{-11}$ [S.I.], $M_{\text{Sol}} = 2 \times 10^{30}$ kg.

c) Teniendo en cuenta la constancia de la velocidad areolar para una fuerza central y midiendo las áreas que consideres oportuno en la figura, estima en qué fecha pasó el asteroide por el perihelio. (Recuerda que la velocidad areolar es el área barrida en la unidad de tiempo por el vector de posición que va desde el Sol hasta el asteroide.)

Consideremos que Oumuamua refleja aproximadamente un 10 % de la intensidad luminosa que le llega del Sol (que es un valor típico para un asteroide). En la siguiente gráfica se muestra la intensidad luminosa con que se detectó en la Tierra la luz proveniente de Oumuamua en función del tiempo (en días, respecto de un origen arbitrario). Supongamos también que el asteroide es homogéneo.



d) En vista de la gráfica razona por qué se piensa que Oumuamua debe tener una forma muy alargada y que está rotando. Obtén el periodo de rotación (en horas) a partir de la gráfica.

Aproximemos la forma de Oumuamua por un cilindro de longitud L y diámetro de la base D , que rota en el plano de la visual con la Tierra.

e) Estima el cociente L / D .

Si la observación de la figura se realizó cuando Oumuamua estaba en el punto B:

f) ¿Qué intensidad luminosa llegaba del Sol a Oumuamua en el punto B? Dato: potencia luminosa emitida por el Sol, $P_{\text{Sol}} = 3,9 \times 10^{26}$ W.

g) El asteroide refleja la luz de forma *difusa*, es decir, la emite en todas direcciones dentro de una semiesfera encarada al Sol, y la Tierra también está encarada en la misma dirección (en muy buena aproximación). Demuestra que el área máxima que presenta Oumuamua (la del rectángulo proyección lateral del cilindro) viene dada por

$$A = \frac{8\pi^2 r_B^2 d^2 I_{\text{max}}}{\eta P_{\text{Sol}}},$$

donde I_{max} es la máxima intensidad detectada en la gráfica, d es la distancia de la Tierra al punto B, r_B la distancia del punto B al Sol y η la fracción de luz que refleja el asteroide ($\eta = 0,1$).

Determina, a partir del valor numérico de A , el valor de la longitud L y el diámetro D .

h) Consideremos ahora a Oumuamua lejos de la influencia del Sol. Vamos a estimar cuanto se frenará por la interacción con las partículas que hay en el medio interestelar. Esencialmente el medio interestelar está compuesto por átomos de hidrógeno con una densidad numérica promedio de $n = 1$ átomo por cm^3 . Suponiendo que el asteroide presenta un área efectiva promedio en la dirección de avance, A , y que las partículas que barre se incorporan a la masa del asteroide, demuestra que sufre una aceleración dada por

$$a = \frac{-m_p}{m} n A v^2,$$

donde m_p es la masa del protón, m la masa de Oumuamua y v su velocidad. Estima su valor numérico suponiendo que el asteroide tiene la misma densidad que la Tierra. Datos: densidad de la Tierra = $5,5 \text{ g/cm}^3$, $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

Resolución

a) Por conservación de la energía mecánica:

$$\frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M m}{r} = \frac{1}{2} m v_A^2 - G \frac{M m}{r_A},$$

donde M es la masa del Sol y m la masa de Oumuamua. Despejando la velocidad se obtiene

$$v(r) = \sqrt{v_A^2 + 2GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_A} \right)}.$$

b) A partir de la figura obtenemos la distancia entre los puntos A y B:

$$d_{AB} \approx \sqrt{0,2^2 + 0,12^2} = 0,23 \text{ UA}.$$

Como transcurrieron 9 días en el trayecto, la velocidad fue

$$v_A = \frac{d_{AB}}{t} = \frac{0,23 \cdot 150 \cdot 10^6}{9 \cdot 24 \cdot 3600} \approx 44 \text{ km/s}.$$

De nuevo de la figura obtenemos la distancia del Sol al punto A:

$$r_A \approx \sqrt{0,7^2 + 0,93^2} = 1,16 \text{ UA}.$$

En el perihelio vemos en la figura que

$$r_p \approx 0,25 \text{ UA}.$$

Introduciendo todos los datos en la expresión del apartado a, obtenemos la velocidad en el perihelio:

$$v_p \approx 86,7 \text{ km/s}.$$

En el infinito, $r = \infty$, la velocidad resulta

$$v_\infty \approx 20 \text{ km/s}.$$

Como esta velocidad es positiva, significa que el asteroide escapa del sistema solar. Y, por la conservación de la energía, concluimos que el asteroide proviene de exterior del sistema solar, es decir, que es un objeto interestelar que nunca ha estado ligado al Sol.

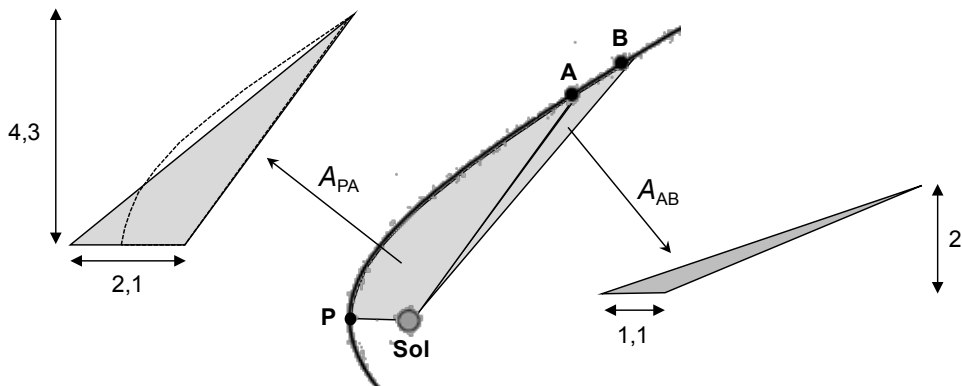
c) Entre 19 y el 28 de octubre pasaron 9 días, que es el tiempo t_{AB} que empleó Oumuamua en viajar del punto A al punto B. El radio vector que une el Sol con el asteroide barrió un área A_{AB} . Entre el perihelio (punto P) y el punto A el asteroide empleó un tiempo t_{PA} y barrió un área A_{PA} .

Por la constancia de la velocidad areolar podemos escribir

$$\frac{A_{PA}}{t_{PA}} = \frac{A_{AB}}{t_{AB}}.$$

Las áreas pueden calcularse de forma gráfica a partir de la figura, por aproximación de triángulos midiendo las dimensiones con una regla directamente sobre el papel o la pantalla. El área A_{AB} es prácticamente igual a la del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y el Sol, de base $1,1 \pm 0,1$ unidades y altura $2,0 \pm 0,1$ unidades. Esta área vale $A_{AB} = (1,1 \times 2) / 2 = 1,1$ unidades. (Téngase en cuenta que las unidades son arbitrarias y los valores numéricos dependen de la escala utilizada, lo que no afecta al resultado final por la linealidad de la expresión de la velocidad areolar.)

Respecto a la región delimitada por el Sol, el perihelio y el punto A, podemos aproximarla a un triángulo de base igual a $2,1 \pm 0,1$ unidades y altura igual a $4,3 \pm 0,1$ unidades, cuya área valdrá $A_{PA} \approx (2,1 \times 4,3) / 2 = 4,5$ unidades.



Finalmente, podemos despejar el tiempo que tardó Oumuamua en pasar del perihelio al punto A:

$$t_{PA} = \frac{A_{PA}}{A_{AB}} t_{AB} = \frac{4,5}{1,1} \cdot 9 \approx 37 \text{ días}.$$

Calculamos también la incertidumbre teniendo en cuenta los errores de medida:

$$\delta t_{PA} = t_{PA} \cdot \left(\frac{\delta A_{PA}}{A_{PA}} + \frac{\delta A_{AB}}{A_{AB}} \right) = 37 \cdot \left(\frac{0,1}{4,5} + \frac{0,1}{1,1} \right) = 4 \text{ días}.$$

Por tanto, Oumuamua pasó por el perihelio 37 ± 4 días antes del 19 de octubre, es decir, entre el 8 y el 16 de septiembre. La fecha real de paso por el perihelio fue el 9 de septiembre, así que el resultado es correcto, teniendo en cuenta las aproximaciones y los errores de medida.

d) Como el brillo que muestra el asteroide no es constante, sino que cambia con el tiempo de forma periódica, concluimos que debe estar rotando.

Suponemos que el asteroide es homogéneo (es la hipótesis más razonable, no hay motivo para suponer que tiene una composición asimétrica que refleja más luz por unas caras que por otras). Entonces, no puede tener simetría esférica, sino que debe tener una forma alargada, similar a la de un pepino.

En la gráfica de la curva de luz medimos que, aproximadamente, el período de los ciclos es de 0,15 días. La rotación completa del asteroide comprende 2 ciclos, porque en cada rotación el asteroide muestra dos veces la cara pequeña y dos veces la cara grande. Por tanto, el período de rotación de Oumuamua es 0,3 días = 7,2 horas.

e) Si Oumuamua es un cilindro rotante de longitud L y diámetro de la base D , desde la Tierra veremos alternativamente una sección rectangular (brillo máximo) y una sección circular (brillo mínimo) de áreas LD y $\pi(D/2)^2$, respectivamente.

La energía luminosa que emite el asteroide hacia la Tierra es proporcional a dichas secciones, por tanto, el cociente entre las áreas de cada sección será igual al cociente entre las energías máxima y mínima que leemos en la curva de luz del asteroide. Así obtenemos el cociente L/D pedido:

$$\frac{LD}{\pi(D/2)^2} = \frac{4L}{\pi D} \approx \frac{32 \cdot 10^{-18}}{2,5 \cdot 10^{-18}} \rightarrow \frac{L}{D} = \frac{\pi}{4} \frac{32}{2,5} = 10.$$

Concluimos que Oumuamua podría ser un objeto unas diez veces más largo que ancho.

f) Medimos en la figura que la distancia entre el Sol y el asteroide en el punto B es $r_B = 1,38$ UA. La intensidad luminosa que llega del Sol al asteroide es

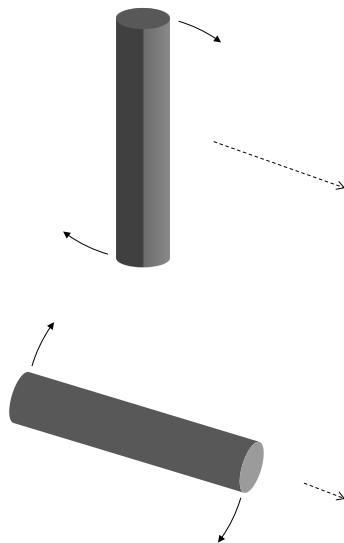
$$I = \frac{P_{\text{Sol}}}{4\pi r_B^2} = 724 \text{ W/m}^2.$$

g) Al asteroide llega una intensidad de luz I calculada en el apartado anterior. Si el asteroide tiene sección de superficie A sobre la que incide la luz solar y refleja un factor $\eta = 0,1$ de dicha luz, la potencia emitida por el asteroide es

$$P = I A \eta = \frac{P_{\text{Sol}}}{4\pi r_B^2} A \eta.$$

A partir de esta potencia calculamos la intensidad luminosa que llega a la Tierra

$$I_T = \frac{P}{2\pi d^2} = \frac{P_{\text{Sol}}}{8\pi^2 r_B^2 d^2} A \eta.$$



Hemos tenido en cuenta que la superficie del asteroide emite ondas semiesféricas, es decir, emite sólo hacia la parte delantera en un área $2\pi d^2$.

Despejando el área A de la sección rectangular del asteroide obtenemos el resultado pedido:

$$A = \frac{8\pi^2 r_B^2 d^2 I_{\max}}{\eta P_{\text{Sol}}},$$

donde $I_{\max}$ es la máxima intensidad I_T detectada en la Tierra cuando el asteroide nos muestra su sección mayor.

Todos los datos en la expresión anterior son conocidos o ya se han calculado a excepción de la distancia d entre la Tierra y el punto B, que podemos medir sobre la gráfica resultando $d \approx 0,38$ UA.

Calculamos el valor del área:

$$A = 9019 \text{ m}^2 = LD = 10D^2,$$

y, finalmente, las dimensiones del cilindro:

$$D = 30 \text{ m}, L = 300 \text{ m}.$$

h) En un tiempo dt , la sección A del asteroide que avanza a velocidad v barre un volumen $dV = Avdt$. Por la 2ª ley de Newton, y puesto que no hay fuerzas externas,

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = ma + v \frac{dm}{dt} = 0 \rightarrow a = -\frac{v}{m} \frac{dm}{dt},$$

donde la variación de masa dm es debida a la incorporación de partículas interestelares. Si la densidad de partículas es $\rho = nm_p = dm / dV$, tendremos que $dm = \rho dV = nm_p Avdt$. La aceleración queda

$$a = -\frac{v}{m} \frac{nm_p Avdt}{dt} = -\frac{nm_p}{m} Av^2.$$

Para calcular su valor tomamos la velocidad $v_{\infty} \approx 20$ km/s del apartado b. Consideramos como sección efectiva el valor medio entre las secciones rectangular y circular, ya que el asteroide está rotando; se obtiene $\bar{A} = 4853 \text{ m}^2$. La masa de Oumuamua es $m = \rho V$, donde la densidad es igual a la de la Tierra y el volumen vale $V = \pi \cdot 15^2 \cdot 300 = 212\,057 \text{ m}^3$. La aceleración resulta

$$a = -3 \times 10^{-18} \text{ m/s}^2,$$

que es una cantidad despreciable. En toda la edad del universo se habría producido por esta causa una disminución de la velocidad de sólo 1 m/s.

Saber más

Meech, K. *et al.* (2017). "A brief visit from a red and extremely elongated interstellar asteroid". *Nature* 552, pp. 378-38 (<https://doi.org/10.1038/nature25020>).

Libro editado como acción del Programa
de Cultura Científica e Innovadora del Plan de
Actuación de la Fundación Séneca para 2022

f SéNeCa⁽⁺⁾

Agencia de Ciencia y Tecnología
Región de Murcia

